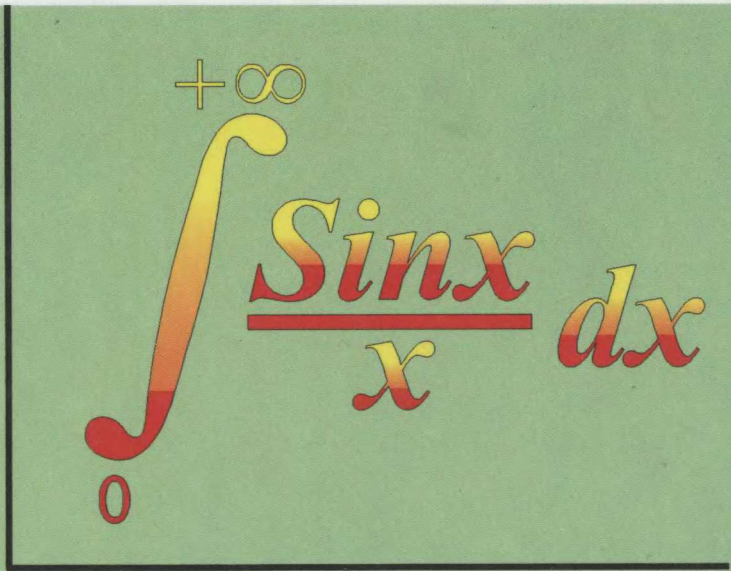


— Библиотека студента —

И. А. ВИНОГРАДОВА, С. Н. ОЛЕХНИК, В. А. САДОВНИЧИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ
(НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ ФУРЬЕ)


$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

И. А. ВИНОГРАДОВА, С. Н. ОЛЕХНИК,
В. А. САДОВНИЧИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

(НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ ФУРЬЕ)



МОСКВА
ФАКТОРИАЛ
1998

ББК 22.161
В 48
УДК 517(075.8)

В 48 Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.
**Математический анализ в задачах и упражнениях
(несобственные интегралы и ряды Фурье): Учебное
пособие** — М.: Изд-во «Факториал», 1998. — 512 с.—
ISBN 5-88688-007-0

Настоящий сборник составлен на материале занятий по курсу математического анализа, изучаемого в третьем семестре на механико-математическом факультете МГУ. В нем даны теоретические сведения и методические указания, а также алгоритмы решения целых классов задач. Данное пособие содержит следующие разделы: несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра (собственные и несобственные), ряды и преобразования Фурье, специальные функции.

Для студентов и преподавателей университетов, педагогических и технических вузов.

*Ирина Андреевна Виноградова
Слав Николаевич Олехник
Виктор Антонович Садовничий*

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ
(Несобственные интегралы и ряды Фурье)**

Формат 84 x 108/32. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 16. Подписано к печати 25.10.1997. Тираж 2000 экз. Заказ № 270.

Издательство «Факториал», 117449, Москва, а/я 331; ЛР № 063537 от 22.07.1994.

Отпечатано с готовых диапозитивов издательства «Факториал» в типографии АО «Астра сем. 121019, Москва, Филипповский пер., 13.

ISBN 5-88688-007-0

© Издательство «Факториал», 1997.
Все права защищены.

Оглавление

Предисловие	4
Глава I. Несобственный интеграл и интегралы с параметром	6
§ 1. Несобственный интеграл	6
§ 2. Собственный интеграл, зависящий от параметра	39
§ 3. Несобственный интеграл, зависящий от параметра	44
§ 4. Упражнения	95
Ответы к главе I	155
§ 5. Теоретические задачи	174
Ответы, решения, указания	191
Глава II. Ряды Фурье. Преобразование Фурье	220
§ 1. Ряды Фурье	220
§ 2. Суммирование тригонометрических рядов с помощью аналитических функций комплексного переменного	253
§ 3. Интеграл Фурье и преобразование Фурье	257
§ 4. Упражнения	279
Ответы к главе II	301
§ 5. Теоретические задачи	316
Ответы, решения, указания	322
Глава III. Специальные функции	331
§ 1. Интеграл вероятностей	331
§ 2. Интегральные функции (синус, косинус, логарифм и показательная функция)	333
§ 3. Синус- и косинус-интегралы Френеля	336
§ 4. Эллиптические интегралы	337
§ 5. Эйлеровы интегралы (Бета- и Гамма-функции)	353
§ 6. Функции Бесселя	373
§ 7. Многочлены Лежандра	383
§ 8. Полиномы Чебышева	388
§ 9. Многочлены Чебышева—Лагерра	391
§ 10. Многочлены Чебышева—Эрмита	394
§ 11. Асимптотические оценки интегралов	399
§ 12. Упражнения	401
Ответы, решения, указания	446

Предисловие

Эта книга завершает работу авторов над сборником задач по курсу математического анализа. В ней содержатся следующие разделы: несобственные интегралы, интегралы, зависящие от параметра (собственные и несобственные), ряды и преобразование Фурье, специальные функции. Первые две главы соответствуют программе математического анализа второго курса (обычно вторая половина третьего семестра) на механико-математическом факультете МГУ; а в последней рассматриваются специальные функции, обычно, за исключением функций Эйлера, не входящие в традиционный курс. Авторы сочли возможным включить рассмотрение этих функций, поскольку, во-первых, они все более и более широко используются в прикладных вопросах, во-вторых, исследование их свойств является применением общих положений теории интеграла, зависящего от параметра.

Как и в предыдущих книгах, набору задач предшествуют подробные методические указания. В них излагаются необходимые теоретические сведения, разбираются на многочисленных примерах методы решения задач, обращается внимание на наиболее распространенные ошибки. Заметим, что при изучении темы “несобственные интегралы” большая часть задач требует для своего решения не только вычислений, но и теоретического обоснования; обстоятельство, специально подчеркнутое в методическом разборе. Поэтому в книге приведено разделение на “упражнения”, для решения которых используются более или менее стандартные методы, разобранные в методических указаниях, и “теоретические задачи”, требующие индивидуального подхода к решению. При этом иногда предлагается использовать результаты “теоретических задач” для более простого решения “упражнений”. В некоторых местах авторы сочли возможным, чтобы не нарушать группировку упражнений, использовать специальные функции, подробное рассмотрение которых проводится позже, делая в таком случае “ссылки вперед”.

При изложении свойств специальных функций авторы предполагают наличие у читателя определенной математи

ческой подготовки. В этой главе существенно используются факты теории функций комплексного переменного и дифференциальных уравнений.

Авторы выражают глубокую благодарность сотрудникам кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ за полезные замечания, предложения и участие в обсуждении при подготовке этой книги.

Глава I. Несобственный интеграл и интегралы с параметром

§1. Несобственный интеграл

Определение А. Пусть ω — собственная или правая несобственная $(+\infty)$ точка числовой прямой и функция $f: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема в смысле Римана на каждом отрезке $[a; b] \subset [a; \omega)$. Тогда, если существует предел

$$\lim_{b \rightarrow \omega-} \int_a^b f(x) dx, \quad (1)$$

то его величина обозначается $\int_a^{\omega} f(x) dx$ и называется несобственным интегралом функции f по промежутку $[a; \omega)$ и функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на $[a; \omega)$.

Сам символ $\int_a^{\omega} f(x) dx$ также называют несобственным интегралом. Если предел (1) существует, то говорят, что данный интеграл сходится или является сходящимся интегралом. Если предел (1) не существует, то говорят, что данный интеграл расходится или является расходящимся интегралом. Таким образом, вопрос о сходимости несобственного интеграла $\int_a^{\omega} f(x) dx$ есть по сути дела вопрос о том, является ли символ $\int_a^{\omega} f(x) dx$ определенным числом или нет.

Точно так же, рассматривая $\lim_{a \rightarrow \omega+} \int_a^b f(x) dx$, можно определить сходимость и величину или расходимость несобствен-

ного интеграла $\int_a^b f(x) dx$, где ω — собственная или левая несобственная $(-\infty)$ точка числовой прямой.

Поскольку оба определения симметричны, то все утверждения в дальнейшем приводятся для интеграла вида $\int_a^\omega f(x) dx$.

Если ω есть собственная точка числовой прямой и $f \in R[a; \omega]$, то $f \in R[a; b]$ для всех $b \in (a; \omega)$ и $\lim_{b \rightarrow \omega-} \int_a^b f(x) dx = \int_a^\omega f(x) dx$. Это свойство выражают так: несобственный интеграл есть обобщение интеграла Римана, и эти интегралы непротиворечивы.

Рассмотрим, насколько расширилась область применения операции интегрирования с введением понятия несобственного интеграла.

Во-первых, появляется возможность интегрирования по бесконечному промежутку. Символ $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ не может быть определен конструкцией Римана или Дарбу, поскольку в эти конструкции входит длина промежутков разбиения промежутка интегрирования, что подразумевает конечность этих промежутков и, следовательно, всего промежутка.

Во-вторых, появляется возможность интегрировать неограниченные функции.

Согласно определению А для того, чтобы ставить вопрос о сходимости интеграла $\int_a^b f(x) dx$, необходимо, чтобы функция f была интегрируема в смысле Римана на каждом отрезке $[a; b] \subset [a; \omega)$. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — монотонно возрастающая последовательность: $\varepsilon_1 \geq a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = \omega$. Тогда в силу критерия

Лебега*) функция f ограничена на каждом отрезке $[a; \varepsilon_n]$ и множество M_n точек разрыва f на $[a; \varepsilon_n]$ есть множество меры нуль. Следовательно, функция f может быть неограничена только в левой полуокрестности точки ω и множество M точек разрыва f на $[a; \omega)$ в силу равенства $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ есть множество меры нуль.

Обозначим символом $\langle a, b \rangle$ собственный или несобственный промежуток, не уточняя, является ли он интервалом, полуинтервалом или отрезком, с возможным исключением конечного множества точек. Точки a и b будем называть концевыми точками промежутка $\langle a, b \rangle$ независимо от того, являются ли они собственными или несобственными точками числовой прямой. Несобственную точку числовой прямой и такую собственную точку, что в любой левой или любой правой полуокрестности ее функция f неограничена, будем называть особыми точками функции f .

Пользуясь введенными терминами, заметим, что определение А есть определение несобственного интеграла функции f на промежутке $\langle a, \omega \rangle$ в том случае, когда особой точкой функции f является только правая концевая точка промежутка $\langle a, \omega \rangle$; а затем определен несобственный интеграл

$\int_{\omega}^a f(x) dx$, если особой точкой функции f является только левая концевая точка промежутка $\langle \omega, a \rangle$.

Определение В. Пусть функция $f: \langle \alpha, \beta \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ имеет на промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$ конечное число особых точек и

$$T: \alpha = a_0 < a_1 < \dots < a_n = \beta$$

— такое разбиение промежутка $\langle \alpha, \beta \rangle$, что на каждом из $\langle \alpha_{i-1}, \alpha_i \rangle$, $1 \leq i \leq n$, особой точкой функции f является только одна из концевых точек. Тогда

*) Функция $f \in R[a; b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена на $[a; b]$ и множество ее точек разрыва на $[a; b]$ есть множество меры нуль.

а) если каждый из интегралов $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) dx$, $1 \leq i \leq n$, сходится, то интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ называется сходящимся (интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ сходится), его величина полагается равной $\sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) dx$ и функция f называется интегрируемой в несобственном смысле на $\langle \alpha, \beta \rangle$;

б) если хотя бы один из интегралов $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) dx$ расходится, то интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ называется расходящимся (интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ расходится).

Это определение корректно, т. е. ни сходимость или расходимость интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, ни его величина в случае сходимости не зависят от выбора разбиения T , удовлетворяющего сформулированному условию.

Обратим внимание на то, что выражения “функция f не интегрируема в несобственном смысле на $\langle \alpha, \beta \rangle$ ” и “интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ расходится” не полностью тождественны.

Именно, говоря “интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ расходится”, мы предполагаем и конечность множества особых точек функции f на $\langle \alpha, \beta \rangle$, и интегрируемость в смысле Римана функции f на любом отрезке $[a; b] \subset \langle \alpha, \beta \rangle$, не содержащем особых точек, и

утверждаем только то, что хотя бы один из пределов, входящих в определение несобственного интеграла по промежутку $\langle \alpha_{i-1}; \alpha_i \rangle$ с концевой особой точкой, не существует. Выражение “функция f не интегрируема на $\langle \alpha; \beta \rangle$ в несобственном смысле” может, кроме того, обозначать и то, что множество особых точек функции f на $\langle \alpha; \beta \rangle$ бесконечно, и то, что f не интегрируема в смысле Римана на некотором отрезке $[a; b] \subset \langle \alpha; \beta \rangle$, не содержащем особых точек функции f (в силу критерия Лебега это эквивалентно тому, что множество точек разрыва f на $[a; b]$ и, тем более, на $\langle \alpha; \beta \rangle$, не есть множество меры нуль).

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на $\langle 0; +\infty \rangle$ имеет одну концевую особую точку — несобственную точку $\omega = +\infty$. Так как

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2},$$

то по определению интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится и его величина равна $\frac{\pi}{2}$.

Пример 2. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$. Функция $f(x) = \sin x$ на $\langle 0; +\infty \rangle$ имеет только одну концевую особую точку — несобственную точку $\omega = +\infty$. Так как

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos b)$$

не существует, то по определению интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x \, dx$ не сходится.

Пример 3. Рассмотрим интегралы:

$$\text{а) } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad \text{в) } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

Начнем с пункта а). На промежутке $\langle 1; +\infty \rangle$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ имеет одну особую точку — несобственную точку $(+\infty)$. Так как

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} (b^{1-p} - a^{1-p}), & p \neq 1, \\ \ln \frac{b}{a}, & p = 1, \end{cases} \quad 0 < a < b < +\infty,$$

то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Переходим к пункту б). На промежутке $\langle 0; 1 \rangle$ функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ интегрируема в смысле Римана при $p \leq 0$ и имеет особую точку $x_0 = 0$ при $p > 0$. Пользуясь приведенным выше равенством, получаем, что

$$\int_b^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} (1 - b^{1-p}), & p \neq 1, \\ -\ln b, & p = 1, \end{cases}$$

откуда следует, что интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Переходим к пункту в). Разбиение $T': (0, 1, +\infty)$ представляет промежутки $\langle 0; +\infty \rangle$ как объединение двух промежутков $\langle 0; 1 \rangle$ и $\langle 1; +\infty \rangle$, на каждом из которых функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ имеет не более одной особой точки, причем эта точка конечная. Согласно определению В интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится тогда

и только тогда, когда сходятся оба интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ и $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Первый из этих интегралов расходится при $p \geq 1$, второй — при $p \leq 1$, таким образом, одновременно оба эти интеграла не сходятся ни при каком значении p . Итак, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ расходится при любом значении p .

Пример 4. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx$.

Функция $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ на промежутке $\langle 0; +\infty \rangle$ имеет две особые точки — собственную точку $x_0 = 0$ и несоответственную точку $(+\infty)$. Разбиение $T: (0, \pi, +\infty)$ представляет промежуток $\langle 0; +\infty \rangle$ как объединение двух промежутков $\langle 0; \pi \rangle$ и $\langle \pi; +\infty \rangle$, на каждом из которых функция $f(x)$ имеет только одну концевую особую точку.

Так как

$$\frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx = d\left(\frac{\sin x}{x}\right), \quad x \neq 0,$$

то

$$\int_a^b \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx = \left(\frac{\sin b}{b} - \frac{\sin a}{a}\right), \quad 0 < a < b < +\infty.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_0^{\pi} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow 0+} \int_b^{\pi} d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{b \rightarrow 0+} \left(-\frac{\sin b}{b}\right) = -1$$

и

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^b d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{\sin b}{b} = 0.$$

Итак, по определению В интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx$ сходится, поскольку сходятся оба интеграла

$$\int_0^{\pi} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx \quad \text{и} \quad \int_{\pi}^{+\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx,$$

и при этом $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx = -1 + 0 = -1$.

Пример 5. Рассмотрим интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$. На промежутке $\langle 0; 2 \rangle$ функция $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ имеет одну, но уже не конечную особую точку $x_0 = 1$. По определению В для сходимости интеграла $\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$ необходима сходимость обоих интегралов: $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ и $\int_1^2 \frac{dx}{1-x^2}$.

Если $0 < b < 1$, то $\int_0^b \frac{dx}{1-x^2} = \ln \frac{1-b}{1+b}$. Так как функция $F(b) = \ln \frac{1-b}{1+b}$ не имеет предела при $b \rightarrow 1-$, то, следовательно, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$ расходится. Итак, независимо от поведения интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{1-x^2}$ интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$ расходится.

Замечание. Функция $F(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$ определена при $x=0$ и $x=2$ и $F(2) - F(0) = \ln \frac{1}{3}$. Если не обратить внимание на то, что функция $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ неограничена и, тем самым,

неинтегрируема на $\langle 0; 2 \rangle$, то, формально применив формулу Ньютона—Лейбница, можно сделать неверный вывод: интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{1-x^2}$ сходится и его величина равна $\ln \frac{1}{3}$.

Внимание! Прежде чем применить формулу Ньютона—Лейбница к интегралу $\int_a^b f(x) dx$, необходимо убедиться, что функция $f(x)$ интегрируема в смысле Римана на $\langle a; b \rangle$.

Пример 6. Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррационально,} \\ 1, & x \text{ — рационально} \end{cases}$$

не интегрируема в смысле Римана ни на каком отрезке $[a; b] \subset [0; 1]$. Следовательно, функция $D(x)$ не интегрируема и в несобственном смысле на $\langle 0; 1 \rangle$.

Множество функций, интегрируемых в несобственном смысле на промежутке $\langle a; b \rangle$ (собственном или несобственном), обозначим через $\tilde{R}\langle a; b \rangle$. Еще раз обратим внимание, что для собственного промежутка $\langle a; b \rangle$ множество $R[a; b]$ интегрируемых в смысле Римана на $[a; b]$ функций есть подмножество $\tilde{R}\langle a; b \rangle$.

Основные свойства несобственного интеграла.

1. Если $f \in \tilde{R}\langle a; b \rangle$ и $g \in \tilde{R}\langle a; b \rangle$, то для любых постоянных α, β функция $\alpha f + \beta g \in \tilde{R}\langle a; b \rangle$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx \quad (\text{линейность}).$$

Другими словами, несобственный интеграл есть линейный функционал на линейном пространстве $\tilde{R}\langle a; b \rangle$.

Следствие. Если $f(x) = f_1(x) + \dots + f_q(x)$ и интегралы $\int_a^b f_i(x) dx$, $1 \leq i \leq q$, сходятся, а интеграл $\int_a^b f_q(x) dx$

расходится, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится.

2. Если $f \in \tilde{R}(a; b)$ и $c \in (a; b)$, то $f \in \tilde{R}(a; c)$, $f \in \tilde{R}(c; b)$ и

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{аддитивность}).$$

3. Если $f \in \tilde{R}(a; b)$, $g \in \tilde{R}(a; b)$ и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in (a; b)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (\text{монотонность интеграла}).$$

Следствие. Если $f \in \tilde{R}(a; b)$ и $|f| \in \tilde{R}(a; b)$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

4. Если ω — единственная особая точка функции f на $(a; \omega)$ и $f \in \tilde{R}(a; \omega)$, то для любой строго монотонной и непрерывно дифференцируемой на $[\alpha; \beta]$ функции $\varphi: [\alpha; \beta] \rightarrow [a; \omega)$ функция $(f \circ \varphi)\varphi' \in \tilde{R}(\alpha; \beta)$ и

$$\int_a^\omega f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

(замена переменного в несобственном интеграле).

5. Если функции $f: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы на $[a; \omega)$ и существует $\lim_{b \rightarrow \omega-} f(x)g(x)$, то

интегралы $\int_a^\omega f(x)g'(x) dx$ и $\int_a^\omega f'(x)g(x) dx$ одновременно сходятся или расходятся, и в случае их сходимости имеет место равенство

$$\int_a^\omega f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^\omega - \int_a^\omega f'(x)g(x) dx,$$

где

$$f(x)g(x)\Big|_a^\omega = \lim_{b \rightarrow \omega-} (f(x)g(x)) - f(a)g(a)$$

(интегрирование по частям в несобственном интеграле).

Из рассмотренных выше примеров видно, что если первообразная функция $F: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ для функции $f: \langle a; b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ аналитически представлена как элементарная функция, то исследование сходимости и вычисление несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ сводится к ранее изученному вопросу существования и вычисления предела элементарной функции. Поэтому основным вопросом в этом разделе является исследование сходимости несобственного интеграла в том случае, когда такое представление первообразной или невозможно или достаточно громоздко.

Заметим, что условие: множество точек разрыва функции f на промежутке $\langle a; b \rangle$ есть множество меры нуль — необходимо и достаточно для того, чтобы функция f была интегрируема в смысле Римана на любом отрезке $[\alpha; \beta] \subset \langle a; b \rangle$, не содержащем особых точек f . Поскольку функции, не обладающие этим свойством или имеющие бесконечное множество особых точек на $\langle a; b \rangle$, заведомо не интегрируемы в несобственном смысле на $\langle a; b \rangle$, то в дальнейшем изложении, не оговаривая этого специально, будем считать, что все рассматриваемые функции имеют на промежутке интегрирования конечное множество особых точек и что множество точек разрыва этих функций на данном промежутке есть множество меры нуль.

Поскольку несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся все a составляющие его интегралы вида $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x) dx$, где особой точкой функции f на $\langle a_{i-1}; a_i \rangle$ является только одна из точек a_{i-1} , a_i , а сходимость несобственного интеграла этого вида симметрично

определяется как для левой, так и для правой концевой точки, то дальнейшие утверждения и соотношения в целях простоты изложения формулируем для интеграла вида $\int_a^\omega f(x) dx$, где $f \in R[a; b]$ для всех $[a; b] \subset [a; \omega)$, если специально не оговорено противное.

Так как сходимость несобственного интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$ есть существование предела функции $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow \omega -$, то условия сходимости интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$, в основном, получаются перефразировкой условий существования предела функции. В частности, если функция f неотрицательна на $[a; \omega)$, то функция $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ монотонна на $[a; \omega)$ и существование предела $\lim_{b \rightarrow \omega -} F(b)$ эквивалентно ограниченности F на $[a; \omega)$.

Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится тогда и только тогда,

когда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $B > a$, что для любых чисел b_1, b_2 , удовлетворяющих условию $B < b_1 < b_2 < \omega$, справедливо неравенство

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Пример 7. Покажем, пользуясь критерием Коши, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sign} \sin \pi x}{x+2} dx$ сходится.

Если $x \in [n; n+1]$, $n \in \mathbb{N}$, то $\operatorname{sign} \sin \pi x = (-1)^n$. Следова-

тельно, если $[b_1] \leq [b_2] - 2$, то

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\text{sign} \sin \pi x}{x+2} dx &= \\ &= \int_{b_1}^{[b_1]+1} \frac{(-1)^{[b_1]}}{x+2} dx + \sum_{n=[b_1]+1}^{[b_2]-1} \int_n^{n+1} \frac{(-1)^n}{x+2} dx + \int_{[b_2]}^{b_2} \frac{(-1)^{[b_2]}}{x+2} dx; \end{aligned}$$

если $[b_1] = [b_2] - 1$, то

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{\text{sign} \sin \pi x}{x+2} dx = \int_{b_1}^{[b_2]} \frac{(-1)^{[b_1]}}{x+2} dx + \int_{[b_2]}^{b_2} \frac{(-1)^{[b_2]}}{x+2} dx;$$

если же $[b_1] = [b_2]$, т. е. точки b_1 и b_2 лежат на одном полуинтервале с целочисленными концами $[n; n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{\text{sign} \sin \pi x}{x+2} dx = \int_{b_1}^{b_2} \frac{(-1)^{[b_1]}}{x+2} dx.$$

Так как

$$\left| \int_{b_1}^{[b_1]+1} \frac{(-1)^{[b_1]}}{x+2} dx \right| < \frac{1}{[b_1]+2} < \frac{1}{b_1+1},$$

$$\left| \int_{[b_2]}^{b_2} \frac{(-1)^{[b_2]}}{x+2} dx \right| < \frac{1}{[b_2]+2} < \frac{1}{b_1+1}$$

и

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=[b_1]+1}^{[b_2]-1} \int_n^{n+1} \frac{(-1)^n}{x+2} dx \right| &= \left| \sum_{n=[b_1]+1}^{[b_2]-1} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n+2} \right) \right| < \\ &< 2 \ln \left(1 + \frac{1}{[b_1]+3} \right) < \frac{2}{b_1+1}, \end{aligned}$$

то

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\text{sign} \sin \pi x}{x+2} dx \right| < \frac{4}{b_1+1}.$$

Итак, если $\frac{4}{\varepsilon} < b_1 < b_2$, то $\left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign} \sin \pi x}{x+2} dx \right| < \varepsilon$. Таким

образом, для интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sign} \sin \pi x}{x+2} dx$ выполнены условия критерия Коши и, следовательно, этот интеграл сходится.

Пример 8. Покажем, пользуясь критерием Коши, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sign} \sin(\pi \ln x)}{x+2} dx$ расходится.

Начнем с формулировки отрицания критерия Коши. Надо найти такое число ε_0 , что для любого $B > 1$ можно указать пару чисел b_1, b_2 , для которых $B < b_1 < b_2$, но

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign} \sin(\pi \ln x)}{x+2} dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

Поскольку интеграл $\left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign} \sin(\pi \ln x)}{x+2} dx \right|$ оценивается сни-

зу, то естественно взять такой промежуток интегрирования $[b_1; b_2]$, на котором подынтегральная функция не меняет знака. Определим числа b_1 и b_2 равенствами: $\ln b_1 = 2n$, $\ln b_2 = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$; тогда для любого числа $B > 1$ условие $B < b_1 < b_2$ выполнено, если взять достаточно большое n . Для $x \in (b_1; b_2)$ имеем $\operatorname{sign} \sin(\pi \ln x) = 1$, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign} \sin(\pi \ln x)}{x+2} dx &= \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{x+2} = \ln(b_2+2) - \ln(b_1+2) = \\ &= \ln b_2 - \ln b_1 + \ln \left(1 + \frac{2}{b_2}\right) - \ln \left(1 + \frac{2}{b_1}\right) > 1 - \frac{2}{b_1} > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Итак, если $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то для любого числа $B > 1$ находится такая

пара чисел b_1, b_2 , что $B < b_1 < b_2$ и $\int_{b_1}^{b_2} \frac{\operatorname{sign} \sin(\pi \ln x)}{x+2} dx > \varepsilon$.

Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sign} \sin(\pi \ln x)}{x+2} dx$ расходится.

Пример 9. Покажем, пользуясь критерием Коши, что интеграл $\int_1^{+\infty} x |\cos \pi x^2| \sin^{2[x^2]^2} \pi x^2 dx$ сходится.

Пусть $1 < b_1 < b_2$. Так как подынтегральная функция неотрицательна, то для целых чисел q_1, q_2 таких, что $1 \leq q_1 \leq b_1^2 < b_2^2 \leq q_2$, имеет место неравенство

$$0 \leq \int_{b_1}^{b_2} x |\cos \pi x^2| \sin^{2[x^2]^2} \pi x^2 dx \leq \int_{\sqrt{q_1}}^{\sqrt{q_2}} x |\cos \pi x^2| \sin^{2[x^2]^2} \pi x^2 dx.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} x |\cos \pi x^2| \sin^{2[x^2]^2} \pi x^2 dx &= \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}} x |\cos \pi x^2| \sin^{2n^2} \pi x^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_n^{n+1} |\cos \pi t| \sin^{2n^2} \pi t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n^2} z d(\sin z) = \frac{1}{2\pi n^2}, \end{aligned}$$

то

$$\int_{\sqrt{q_1}}^{\sqrt{q_2}} x |\cos \pi x^2| \sin^{2[x^2]^2} \pi x^2 dx = \sum_{n=q_1}^{q_2-1} \frac{1}{2\pi n^2} < \frac{1}{2\pi(q_1-1)}.$$

Итак, если $\sqrt{\frac{1}{2\pi\varepsilon}} + 2 < b_1 < b_2$, то

$$0 \leq \int_{b_1}^{b_2} x |\cos \pi x^2| \sin^{2[x^2]^2} \pi x^2 dx < \varepsilon,$$

следовательно, в силу критерия Коши, интеграл

$$\int_1^{+\infty} x |\cos \pi x^2| \sin^{2[x^2]^2} \pi x^2 dx$$

сходится.

Обратите внимание на то, что подынтегральная функция $f(x) = x|\cos \pi x^2| \sin^2[x^2]^2 \pi x^2$ в данном сходящемся интеграле не стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ и даже не ограничена на $[1; +\infty)$.

Предлагаем читателю самостоятельно сформулировать утверждение критерия Коши сходимости несобственного интеграла и его отрицание в том случае, когда единственной особой точкой подынтегральной функции является левая конечная точка промежутка интегрирования.

Из критерия Коши немедленно следует, что сходимость или расходимость интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$ зависит от поведения функции f только в левой полуокрестности точки ω — промежутке вида $\langle c; \omega \rangle$. Будем говорить, что функция f локально слева (справа) в точке ω обладает некоторым свойством, если существует такая левая (правая) полуокрестность точки ω , в которой f обладает этим свойством. Например, выражение “функция f монотонно локальна слева в точке ω ” обозначает, что f монотонна на некотором промежутке $\langle c; \omega \rangle$.

Как уже не раз отмечалось при исследовании существования предела, применение критерия Коши для исследования сходимости конкретного несобственного интеграла, по большей части, технически сложно. Поэтому, в основном, при решении этого вопроса используются достаточные условия, в совокупности имеющие большой объем применения.

Теорема сравнения. Пусть функции $f: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: [c; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют неравенству $0 \leq f(x) \leq g(x)$ локально слева в точке ω . Тогда из сходимости интеграла $\int_c^\omega g(x) dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$, а из расходимости $\int_a^\omega f(x) dx$ следует расходимость интеграла $\int_c^\omega g(x) dx$.

Следствием этой теоремы является

Признак сравнения. Пусть функция $f: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ неотрицательна, функция $g: [c; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ локально слева неотрицательна в точке ω и $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow \omega$. Тогда интегралы

$\int_a^\omega f(x) dx$ и $\int_c^\omega g(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Заметим, что для локально неотрицательных слева в точке ω функций $f: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ограниченность функции $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ на $[a; \omega)$ эквивалентна сходимости интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$. Поэтому для таких — и только для таких! — функций вместо выражений “интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится” и “интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ расходится” применяют соответственно символы: $\int_a^\omega f(x) dx < \infty$ и $\int_a^\omega f(x) dx = \infty$.

Применение теоремы и признака сравнения для анализа сходимости несобственных интегралов требует, как и для рядов, набора “эталонных” функций, сходимость или расходимость соответствующего интеграла для которых установлена. Наиболее употребительным таким набором является семейство степенных функций: $g(x) = \frac{1}{x^p}$ для анализа интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $g(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$ для анализа интегралов вида $\int_a^b f(x) dx$, где особой точкой функции f является точка b ($-\infty < a < b < +\infty$).

Как было показано выше, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Дословно повторяя ход анализа интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ получаем, что интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ ($-\infty <$

$< a < b < +\infty$) сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$. В силу линейности для любого $c > 0$ получаем, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{c dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$, а интеграл $\int_a^b \frac{c dx}{(b-x)^p}$ ($-\infty < a < b < +\infty$) сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geq 1$.

Обратим внимание на то, что хотя в теореме сравнения и признаке сравнения есть условия как сходимости, так и расходимости интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$, однако ни то, ни другое не являются критерием сходимости. Дело в том, что нет такой универсальной (зависящей только, может быть, от промежутка $[a; \omega)$) функции $g: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$, чтобы из неравенства $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $x \in [a; \omega)$, следовала бы сходимость, а из неравенства $f(x) > g(x)$, $x \in [a; \omega)$, — расходимость интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$ (или из неравенства $0 \leq f(x) < g(x)$ сходимость, а из неравенства $f(x) \geq g(x)$ расходимость).

Признаки Дирихле—Абеля сходимости несобственного интеграла.

I. Пусть функции $f: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям:

а) интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится,

б) функция g локально монотонна слева в точке ω и ограничена на $[a; \omega)$.

Тогда интеграл $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ сходится.

II. Пусть функций $f: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям:

а) функция $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ ограничена на $[a; \omega)$,

б) функция g локально монотонна слева в точке ω и $\lim_{x \rightarrow \omega-} g(x) = 0$.

Тогда интеграл $\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ сходится.

Теорема. Если интеграл $\int_a^\omega |f(x)| dx$ сходится, то интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится.

Определение. Если интеграл $\int_a^\omega |f(x)| dx$ сходится, то интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ называется абсолютно сходящимся. Если интеграл $\int_a^\omega |f(x)| dx$ расходится, а интеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ сходится, то этот интеграл называется условно сходящимся.

Пользуясь этими терминами, предыдущую теорему можно сформулировать так: “абсолютно сходящийся интеграл сходится” или “множество абсолютно сходящихся интегралов есть подмножество сходящихся интегралов”.

Для функций, локально сохраняющих знак в соответствующей полуокрестности особой точки, сходимость несобственного интеграла, очевидно, совпадает с абсолютной сходимостью. Таким образом, теорема и признак сравнения говорят по сути об абсолютной сходимости несобственного интеграла. В формулировке признаков Абеля—Дирихле ограничений на знак подынтегральной функции нет, так что они могут применяться как к интегралу от функции, локально сохраняющей знак в левой полуокрестности точки ω , так и к интегралу от функции, не обладающей этим свойством. На деле, признаки Абеля и Дирихле существенно используются именно для установления сходимости, чаще всего условной, интегралов от функций, не являющихся знакопостоянными в левой полуокрестности точки ω . Действительно, из условия, что сомножитель $g(x)$ — локально монотонная и огра-

ниченная слева в точке ω функция, следует, что g локально сохраняет знак слева в точке ω . Если произведение $f(x)g(x)$ локально сохраняет знак слева в точке ω , то, не ограничивая общности, можно считать, что обе функции g и f локально неотрицательны слева в точке ω , поэтому ограниченность

функции $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ и сходимость интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$

эквивалентны. Из всего этого следует, что при выполнении условий признаков Абеля и Дирихле сходимость интеграла

$\int_a^\omega f(x)g(x) dx$ следует из теоремы сравнения и сходимости интеграла $\int_a^\omega f(x) dx$. Проверка же того, что для данной подынтегральной функции выполнены условия теоремы сравнения, обычно проще проверки выполнения условий признаков Абеля или Дирихле.

Чаше всего признаки Абеля—Дирихле применяются для установления сходимости интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x) \cos x dx$, если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится. В таком случае проще начать с установления сходимости интеграла, а для анализа абсолютной сходимости широко используемым приемом является оценка:

$$|f(x) \sin x| \geq |f(x)| \sin^2 x = \frac{|f(x)|}{2} (1 - \cos 2x);$$

$$|f(x) \cos x| \geq |f(x)| \cos^2 x = \frac{|f(x)|}{2} (1 + \cos 2x).$$

Распространенной ошибкой при применении признаков Абеля—Дирихле является пропуск установления монотонности сомножителя $g(x)$. Часто она происходит из-за очевидности этой монотонности, но всегда необходимо отмечать, что это свойство выполнено. Иногда считают достаточным написать оценку $0 \leq g(x) \leq \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ монотон-

но стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Следует ясно понимать, что из этой оценки следует только равенство $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, но никоим образом не монотонность $g(x)$. Заметим, что алгебраическая (в частности, рациональная) функция локально монотонна слева в $+\infty$: этим фактом будем в дальнейшем пользоваться.

Пример 10. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^6 + 4x^3 + 3} dx.$$

Решение. Прежде всего заметим, что поскольку функция $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^6 + 4x^3 + 3}$ рациональна, то ее первообразная выражается в виде элементарной функции. Найдя это выражение, можно было бы не только решить вопрос о сходимости данного интеграла, но и в случае положительного решения найти его величину. Но вычисление первообразной здесь технически громоздко, а задача определения величины интеграла не ставится, поэтому вместо нахождения и исследования первообразной воспользуемся признаком сравнения. Так как единственной особой точкой функции $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^6 + 4x^3 + 3}$ на $\langle 0; +\infty \rangle$ является несобственная точка $+\infty$, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится и $\frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^6 + 4x^3 + 3} \sim \frac{1}{x^2}$ при $x \rightarrow +\infty$, то в силу признака сравнения интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^4 - 2x^2 - 1}{x^6 + 4x^3 + 3} dx$ сходится.

Пример 11. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}}.$$

Решение. Функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}}$ имеет на промежутке $\langle 0; +\infty \rangle$ две особые точки: 0 и $+\infty$. Следовательно, не-

обходимо отдельно рассмотреть сходимость каждого из интегралов: $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}}$ и $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}}$ для некоторого $a \in (0; +\infty)$.

Пользуясь признаком сравнения и соотношениями

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}} \sim \frac{1}{2x^3} \text{ при } x \rightarrow +\infty, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}} \sim \frac{1}{x^{4/3}} \text{ при } x \rightarrow 0,$$

получаем, что интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}}$ сходится, а интеграл $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}}$ ($0 < a < +\infty$) расходится. Таким образом, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4 + 8x^9}}$ расходится.

Пример 12. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}.$$

Решение. Функция $\frac{1}{\sqrt{x + x^3}}$ имеет на промежутке $(0; +\infty)$ две особые точки — собственную $x_0 = 0$ и несобственную точку $(+\infty)$. Следовательно, необходимо отдельно рассмотреть сходимость каждого из интегралов $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}$ и $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}$ для некоторого $a \in (0; +\infty)$.

Пользуясь признаком сравнения, из соотношений

$$\frac{1}{\sqrt{x + x^3}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ при } x \rightarrow 0+, \quad \frac{1}{\sqrt{x + x^3}} \sim \frac{1}{x^{3/2}} \text{ при } x \rightarrow +\infty$$

получаем, что каждый из этих интегралов сходится, т. е. сходит

$$\text{сится } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x + x^3}}.$$

Пример 13. Зависимость периода колебаний T математического маятника от его длины L и начального угла отклонения от вертикали φ_0 выражается формулой

$$T = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Показать, что этот интеграл сходится при $0 < \varphi_0 < \pi$.

Решение. На промежутке $\langle 0; \pi \rangle$ функция

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

имеет одну особую точку $\varphi = \varphi_0$. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \sim \frac{2}{(\sin^{1/2} \varphi_0)(\varphi_0 - \varphi)^{1/2}} \quad (\varphi \rightarrow \varphi_0),$$

то в силу признака сравнения интеграл $\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$ сходится.

Если представить маятник как невесомый стержень, один конец которого закреплен в шарнире без трения, а второй, с закрепленной на нем точечной массой, свободен, то можно говорить и о начальных углах $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi$. При этом маятник качаться вообще не будет, ибо в первом случае он находится в устойчивом, а во втором — в неустойчивом равновесии. Если $\varphi_0 \rightarrow 0+$, то $T \rightarrow 0$, а если $\varphi_0 \rightarrow \pi-$, то $T \rightarrow +\infty$, т. е. по мере приближения начального положения маятника к состоянию неустойчивого равновесия период его колебаний неограниченно растёт.

Пример 14. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

Решение. Функция $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ имеет на промежутке $\langle 0; +\infty \rangle$ одну особую точку $(+\infty)$. Поскольку функция

$f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ при $x \rightarrow +\infty$ не эквивалентна никакой степенной функции, то применяем не признак сравнения, а теорему сравнения. Для любого $a > 0$ неравенство $0 < e^{-\sqrt{x}} < \frac{1}{x^a}$ справедливо, если $x > B(a)$ (обратите внимание, что значение B зависит от a). Если $a \leq 1$, то такая оценка неинформативна — интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ расходится, а этот факт ничего не говорит о поведении интеграла от меньшей функции. Значит, нужно взять такое значение a , чтобы интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ сходил, тогда оценка $0 < e^{-\sqrt{x}} < \frac{1}{x^a}$ будет информативна. Поскольку единственное ограничение на a есть условие $a > 0$, то имеем право взять $a = 2$, и тогда из неравенства $e^{-\sqrt{x}} < \frac{1}{x^2}$, $x > B(2)$, в силу теоремы сравнения получим, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$ сходится.

Пример 15. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx.$$

Решение. Подынтегральная функция $f(x) = \ln \sin x$ неположительна и имеет на $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ одну особую точку $x_0 = 0$. В силу линейности сходимость интеграла $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$ эквивалентна сходимости интеграла от неотрицательной функции $\int_0^{\pi/2} |\ln \sin x| \, dx = - \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$. Так как аргумент логарифма при $x \rightarrow 0$ является бесконечно малой величиной, то функция $|\ln \sin x|$ не эквивалентна никакой степенной функции ар-

гумента логарифма, т. е. функции вида $\frac{1}{\sin^a x}$ *). Поэтому применим не признак сравнения, а теорему сравнения. Для любого числа $a > 0$ неравенство $|\ln \sin x| < \frac{1}{\sin^a x}$ справедливо, если $0 < x < B(a)$ (величина B зависит от a). Если $a > 1$, то из соотношения $\frac{1}{\sin^a x} \sim \frac{1}{x^a}$, $x \rightarrow 0$, и признака срав-

нения следует, что интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^a x} dx$ расходится — эта

оценка неинформативна, поскольку расходимость интеграла от большой функции ничего не говорит о поведении интеграла от меньшей. Значит, надо взять такое значение a , чтобы

интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^a x}$ сходил, тогда оценка $|\ln \sin x| < \frac{1}{\sin^a x}$

будет информативна. Поскольку единственное ограничение на a есть условие $a > 0$, то имеем право положить $a = \frac{1}{2}$.

Тогда из соотношения $\frac{1}{\sqrt{\sin x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \rightarrow 0$ и признака срав-

нения получим, что интеграл $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$ сходится, а из не-

равенства $|\ln \sin x| < \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ и теоремы сравнения получим

окончательно, что сходится интеграл $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$.

Обратим внимание на то, что в ходе решения использовалось соотношение эквивалентности $\sin x \sim x$, $x \rightarrow 0$, а не $\ln \sin x \sim \ln x$, $x \rightarrow 0+$. Из соотношения $g(x) \sim f(x)$, $x \rightarrow a$, вообще говоря, не следует соотношение $h(g(x)) \sim h(f(x))$, $x \rightarrow a$; такое утверждение в каждом конкретном случае требует обоснования. Соотношение $\ln \sin x \sim \ln x$, $x \rightarrow 0+$ верно (проверьте), но его обоснование было бы излишним усложне-

*) $\ln \alpha = o\left(\frac{1}{\alpha^a}\right)$, $\alpha \rightarrow 0+$, для любого $a > 0$.

нием решения примера.

Пример 16. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \cos x}{40 + x^2} dx.$$

Функция $f(x) = \frac{x \cos x}{40 + x^2}$ имеет на $\langle 0; +\infty \rangle$ одну особую точку $(+\infty)$ и не сохраняет знак локально слева в этой точке. Теоретически надо было бы начать с анализа абсолютной сходимости данного интеграла, но так как $\frac{x}{40 + x^2} \sim \frac{1}{x}$, $x \rightarrow +\infty$, то простейшая оценка $|f(x)| \leq \frac{x}{40 + x^2}$ не дает возможности утверждать, что интеграл $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится.

Как уже говорилось, в данном случае проще начать с проверки выполнения условий признаков Абеля—Дирихле. Действительно, функция $F(b) = \int_0^b \cos x dx = \sin b$ ограничена

на $[0; +\infty)$, рациональная функция $g(x) = \frac{x}{40 + x^2}$ локально монотонна слева в точке $(+\infty)$ ($g(x)$ монотонна на луче $x \geq \sqrt{40}$) и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Итак, в силу признака Дирихле—

Абеля интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos x}{40 + x^2} dx$ сходится.

Для исследования абсолютной сходимости данного интеграла применим указанную выше оценку $|\cos x| \geq \cos^2 x$. Имеем

$$\left| \frac{x \cos x}{40 + x^2} \right| \geq \frac{x \cos^2 x}{40 + x^2} = \frac{x}{40 + x^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right).$$

Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, получа-

ем, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos 2x}{2(40 + x^2)} dx$ сходится. Соотношение

$\frac{x}{2(40+x^2)} \sim \frac{1}{2x}$, $x \rightarrow +\infty$, и признак сравнения показывают, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x}{2(40+x^2)} dx$ расходится. Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos^2 x}{40+x^2} dx$ расходится, откуда в силу теоремы сравнения следует, что расходится интеграл $\int_0^{+\infty} \left| \frac{x \cos x}{40+x^2} \right| dx$, т. е. интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos x}{40+x^2} dx$ сходится условно.

Пример 17. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}} dx.$$

Решение. Функция $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}}$ имеет на $\langle 0; +\infty \rangle$ две особые точки $x_0 = 0$ и $(+\infty)$, следовательно, необходимо отдельно рассмотреть сходимость каждого из интегралов $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}} dx$ и $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}} dx$ для некоторого $a \in (0; +\infty)$.

Начнем с простейших оценок. Так как $\frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \rightarrow 0$ и подынтегральная функция неотрицательна, то в силу признака сравнения интеграл $\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}} dx$ сходится абсолютно.

Так как $\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^3+x^5}}$ и $\frac{1}{\sqrt{x^3+x^5}} \sim \frac{1}{x^{5/2}}$ при $x \rightarrow +\infty$, то в силу теоремы и признака сравнения интеграл $\int_a^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^5}} \right| dx$ сходится. Следовательно, интеграл

$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^5}} \right| dx$ сходится, т. е. интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^5}} dx$ сходится абсолютно.

Пример 18. Исследуем сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^{3/2}} dx$.

Функция $f(x) = \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^{3/2}}$ на $(0; 1)$ имеет одну особую точку $x_0 = 0$. Начнем опять с проверки условий признаков Абеля—Дирихле, поскольку простейшая оценка $\left| \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ не дает возможности утверждать о сходимости (абсолютной) данного интеграла.

Особой точкой подынтегральной функции является левый конец промежутка интегрирования, поэтому и условия в признаках Абеля—Дирихле симметрично изменяются. Функция

$F(b) = \int_b^1 \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx = \sin \frac{1}{b} - \sin 1$ ограничена на $(0; 1)$,

функция $g(x) = \sqrt{x}$ монотонна на $(0; 1]$ и $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$, следовательно, интеграл $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^{3/2}} dx = \int_0^1 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$ сходится.

Применяя оценку $\left| \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^{3/2}} \right| \geq \frac{\cos^2 \frac{1}{x}}{x^{3/2}} = \frac{1 + \cos \frac{2}{x}}{2x^{3/2}}$, видим, что ин-

теграл $\int_0^1 \left| \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^{3/2}} \right| dx$ расходится, так как интеграл $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\cos \frac{2}{x}}{x^{3/2}} dx$

сходится, а интеграл $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ расходится. Итак, интеграл

$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^{3/2}} dx$ сходится условно.

Замечание. При исследовании сходимости интегралов вида $\int_a^{\omega} f(x) \sin(\varphi(x)) dx$ и $\int_a^{\omega} f(x) \cos(\varphi(x)) dx$, где $\varphi(x)$ ло-

кально монотонна слева в точке ω и $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \omega-$, часто делают замену: $\varphi(x) = t$ с тем, чтобы прийти к интегралу “стандартного” вида: $\int_{\alpha}^{+\infty} f^*(t) \sin t \, dt$ и $\int_{\alpha}^{+\infty} f^*(t) \cos t \, dt$.

В данном примере можно было, сделав замену $t = \frac{1}{x}$, перейти к интегралу $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} \, dt$, но поскольку проверка выполнения условий признака Дирихле—Абе́ля оказалась несложной, особой необходимости в этом преобразовании нет.

Пример 19. Исследовать сходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2 - x) \, dx.$$

Решение. Функция $t = x^2 - x$ монотонна на луче $(\frac{1}{2}; +\infty)$, но обратная функция $x = \frac{1}{2} + \sqrt{t + \frac{1}{4}}$ на соответствующем луче $(-\frac{1}{4}; +\infty)$ имеет неограниченную производную. Поскольку непрерывность производной x'_t является одним из условий замены переменного в несобственном интеграле (см. пункт 4 в основных свойствах несобственного интеграла), то замену $t = x^2 - x$, $x = \frac{1}{2} + \sqrt{t + \frac{1}{4}}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{4t+1}}$ сделаем в интеграле $\int_1^{+\infty} \sin(x^2 - x) \, dx$, так как на луче $[1; +\infty)$ уже все условия замены переменной выполнены. Так как функция $\sin(x^2 - x)$ непрерывна на $[0; 1]$, следовательно, интегрируема в смысле Римана на $[0; 1]$, то сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} \sin(x^2 - x) \, dx$ и сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \sin(x^2 - x) \, dx =$

$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{4t+1}} dt$ эквивалентны. Функция $F(b) = \int_0^b \sin t dt = 1 - \cos b$ ограничена на $[0; +\infty)$, функция $g(t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}}$ монотонна на $[0; +\infty)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$, следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{4t+1}} dt$ сходится в силу признаков Дирихле—Абе́ля. Так как

$$\left| \frac{\sin t}{\sqrt{4t+1}} \right| \geq \frac{\sin^2 t}{\sqrt{4t+1}} = \frac{1}{2\sqrt{4t+1}} - \frac{\cos 2t}{2\sqrt{4t+1}},$$

интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{2\sqrt{4t+1}}$ расходится, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2\sqrt{4t+1}} dt$

сходится, то интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{\sqrt{4t+1}} dt = \int_0^{+\infty} |\sin(x^2-x)| dx$ рас-

ходится. Итак, интеграл $\int_0^{+\infty} \sin(x^2-x) dx$ сходится условно.

Пример 20. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\sin x) \ln x}{\sqrt{x^2+1}} dx.$$

Функция $F(b) = \int_1^b \sin x dx = \cos 1 - \cos b$ ограничена на

$(1; \infty)$. Неравенство $\frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}} < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{x}}}$ показы-

вает, что функция $g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, но ничего не говорит о монотонности $g(x)$. Так как $g(x)$ не является алгебраической функцией, локальную монотонность которой слева в $(+\infty)$ мы считаем известной, то в решении данного примера проверка монотонности $g(x)$ необходима.

Действительно, соотношение $g'(x) = \frac{1 - x^2(\ln x - 1)}{x(x^2 + 1)^{3/2}}$ показывает, что $g(x)$ монотонна на $[e^2; +\infty)$. Итак, все условия признаков Дирихле—Абе́ля выполнены, следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x) \sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ сходится. Из соотношений:

$$\left| \frac{(\ln x) \sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| \geq \frac{(\ln x) \sin^2 x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{(\ln x) \cos 2x}{2\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$\frac{\ln x}{2\sqrt{x^2 + 1}} > \frac{1}{4x} \quad (x \geq 1)$$

следует, что интеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{(\ln x) \sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| dx$ расходится, ибо интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{4x}$ расходится, а интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x) \cos 2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx$ сходится. Итак, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x) \sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ сходится условно.

Пример 21. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x \sin x - \cos x)}{x^2} \cos x dx.$$

Функция $F(b) = \int_1^b \cos x dx = \sin b - \sin 1$ ограничена на $(1; +\infty)$. Неравенство $\left| \frac{x \sin x - \cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ показывает, что функция $g(x) = \frac{x \sin x - \cos x}{x^2}$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, но функция $g(x)$, очевидно, не является локально монотонной слева в $(+\infty)$. Таким образом, представление подынтегральной функции в виде произведения

$$\cos x \cdot \frac{x \sin x - \cos x}{x^2}$$

не дает возможности применить к данному интегралу признаки Дирихле—Абе́ля. Испробуем другой путь: представим подынтегральную функцию в виде суммы:

$$\frac{\cos x(x \sin x - \cos x)}{x^2} = \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{\cos^2 x}{x^2}.$$

Из неравенства $0 \leq \frac{\cos^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ ($x \geq 1$) следует, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2} dx$ сходится абсолютно. К интегралу $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x} dx$

уже легко применяются признаки Дирихле—Абе́ля. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что этот интеграл сходится условно. Следовательно, интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x(x \sin x - \cos x)}{x^2} dx$$

сходится условно.

Читатель, наверное, обратил внимание, на параллелизм многих понятий и методов в теории рядов и несобственных интегралов, как, например, условная и абсолютная сходимость, теоремы сравнения, признаки Абе́ля—Дирихле и т. д. Эта взаимосвязь есть отражение взаимосвязи понятий предела последовательности (сумма ряда) и предела функции (несобственный интеграл). Как предел последовательности есть предел функции, определенной на множестве натуральных чисел, так и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ является интегралом $\int_1^{+\infty} f(x) dx$,

где $f(x) = a_n$, $n \leq x < n+1$, $n \in \mathbb{N}$. В свою очередь, определение Гейне предела $\lim_{b \rightarrow \omega-} \int_a^b f(x) dx$ приводит к утверждению:

если $f \in R[a; b]$ для любого $[a; b] \subset [a; \omega)$, то для сходимости интеграла $\int_a^{\omega} f(x) dx$ необходимо и достаточно условие:

для любой монотонной последовательности $b_n \rightarrow \omega -$, $a = b_0$,

$n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_{n-1}}^{b_n} f(x) dx$ сходится.

Существенное — но не принципиальное! — отличие теории рядов от теории несобственного интеграла — как и отличие теории предела последовательности от теории предела функции, — это то, что в первом случае параметр перехода к пределу меняется по дискретному множеству натуральных чисел с единственной предельной точкой $(+\infty)$, а во втором этот параметр меняется непрерывно и предельной (односторонней) точкой может быть любая точка расширенной числовой прямой. Не имеют аналогов в теории несобственного интеграла те методы исследования сходимости рядов, которые существенно используют свойства натурального ряда — признаки Даламбера, Коши, Гаусса. В свою очередь, специфика несобственного интеграла проявляется при исследовании интегралов вида $\int_a^{\omega} f(x) dx$, где $f \in R[a; b]$ для любого $[a; b] \subset [a; \omega)$ и ω — собственная точка числовой прямой.

Так, в этом случае для сходимости интеграла от степенной функции: $\int_a^{\omega} \frac{dx}{(\omega - x)^p}$ необходимым и достаточным является условие $p < 1$, а для сходимости аналогичного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ — условие $p > 1$. Обратим еще внимание на то, что из сходимости — даже абсолютной — интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ (см. пример 9) не следует, что функция $f(x)$ стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$, в то время как условие $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ необходимо для сходимости ряда.

Необходимо ясно и четко понимать как общность, так и особенности теории рядов и теории несобственных интегралов и не допускать ложных аналогий и неверных переносов утверждений из одной в другую.

§2. Собственный интеграл, зависящий от параметра

В функциональном ряде $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ член ряда представляет собой функцию двух переменных: натурального числа n — индекса суммирования и параметра x из некоторого множества X . Параллельным понятием в теории несобственных интегралов является несобственный интеграл от функции двух переменных $f(x, t)$, из которых одно является переменным интегрирования, а второе — параметром из некоторого множества T . Такой интеграл определяется предельным переходом в интеграле Римана от $f(x, t)$ так, как сумма ряда — предельным переходом в последовательности конечных сумм $\{S_n(x)\}$. Поэтому прежде, чем рассмотреть свойства несобственного интеграла, зависящего от параметра, необходимо рассмотреть свойства интеграла Римана, зависящего от параметра.

Определение. Пусть для каждого $t \in T$ функция $f(x, t)$ интегрируема в смысле Римана на отрезке $[a(t); b(t)]$. Тогда

функция $F(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$ называется собственным интегралом, зависящим от параметра t .

Замечание 1. Термин “собственный интеграл, зависящий от параметра” принят вместо термина “интеграл Римана, зависящий от параметра” в целях однородности терминологии.

Замечание 2. Собственным интегралом, зависящим от параметра, называют и сам символ $\int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx$. Естествен-

ной областью изменения t в таком случае является совокупность тех значений t_0 , для которых $f(x, t_0) \in R[a(t_0); b(t_0)]$.

Теорема о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра. Пусть $D = \{(x, t): a \leq x \leq$

$\leq b, c \leq t \leq d$ }, функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ непрерывны на $[c; d]$ и $\alpha[c; d] \subset [a; b], \beta[c; d] \subset [a; b]$. Тогда, если $f(x, t) \in C(D)$,

то функция $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx$ определена и непрерывна на $[c; d]$.

Теорема об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра. Пусть $D = \{(x, t): a \leq$

$x \leq b, c \leq t \leq d\}$. Если $f(x, t) \in C(D)$ и $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$,

то

$$\int_c^d F(t) dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx.$$

В силу предыдущей теоремы функция $F(t)$ непрерывна и, тем более, интегрируема на $[c; d]$.

Теорема о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра. Пусть $D = \{(x, t): a \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ и функции $\alpha(t), \beta(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[c; d]$, причем $\alpha[c; d] \subset [a; b], \beta[c; d] \subset [a; b]$.

Если $f \in C(D)$ и $\frac{\partial f}{\partial t} \in C(D)$, то функция $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx$ непрерывно дифференцируема на $[c; d]$ и

$$F'(t) = f(\beta(t), t) \cdot \beta'(t) - f(\alpha(t), t) \cdot \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dt.$$

Пример 22. Найти $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \int_1^3 \sin tx \cdot \sqrt{x^2 + t^2 + tx - 1} dx$.

Решение. Функция

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{\sin tx}{t} \cdot \sqrt{x^2 + t^2 + tx - 1}, & t \neq 0, x \in [1; 3], \\ x\sqrt{x^2 - 1}, & t = 0, x \in [1; 3], \end{cases}$$

непрерывна на прямоугольнике $[1; 3] \times [0; 1]$. Следовательно, в силу теоремы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \int_1^3 \sin tx \cdot \sqrt{x^2 + t^2 + tx - 1} dx &= \lim_{t \rightarrow 0+} \int_1^3 f(x, t) dx = \\ &= \int_1^3 f(x, 0) dx = \int_1^3 x \sqrt{x^2 - 1} dx = \frac{1}{3} (x^2 - 1)^{3/2} \Big|_1^3 = \frac{16\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Пример 23. Найти $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 - \frac{x}{n})^n}$.

Решение. Для того, чтобы применить теорему о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, введем функцию двух переменных:

$$f(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (1 - tx)^{1/t}}, & x \in [0; 1], t \in (0; 1), \\ \frac{1}{1 + e^{-x}}, & x \in [0; 1], t = 0. \end{cases}$$

Функция $f(x, t)$ непрерывна на прямоугольнике $[0; 1] \times [0; 1]$ (проверьте!), следовательно, в силу указанной теоремы:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^1 f(x, t) dx = \int_0^1 f(x, 0) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^{-x}} = \ln(1 + e).$$

Так как

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 - \frac{x}{n})^n} = \int_0^1 f\left(x, \frac{1}{n}\right) dx,$$

то

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + (1 - \frac{x}{n})^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f\left(x, \frac{1}{n}\right) dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^1 f(x, t) dt = \ln(1 + e). \end{aligned}$$

Пример 24. Функции

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \text{и} \quad F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

где $0 < k < 1$, называются полными эллиптическими интегралами. Доказать, что

$$F'_k = \frac{E(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{F(k)}{k}$$

для любого $k \in (0; 1)$.

Решение. Для любого $k \in (0; 1)$ существует такой отрезок $[\alpha; \beta] \subset (0; 1)$, что $k \in (\alpha; \beta)$. На прямоугольнике $\left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times [\alpha; \beta]$ функция $f(\varphi, k) = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ удовлетворяет условиям теоремы о дифференцировании интеграла, зависящего от параметра, следовательно,

$$F'_k = \int_0^{\pi/2} \frac{k \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi, \quad k \in (\alpha; \beta).$$

Алгебраическими преобразованиями из этого равенства получаем следующее:

$$\begin{aligned} F'_k &= \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{k \sin^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi + \\ &+ \frac{1}{k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{k \cos^2 \varphi}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} d\varphi - \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

где $k \in (\alpha; \beta)$, откуда выводим, что

$$(1 - k^2)F'_k = kF(k) - \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \frac{d(k \sin \varphi)}{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \quad k \in (\alpha; \beta).$$

Так как $\frac{dz}{(1-z^2)^{3/2}} = d\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \frac{d(k \sin \varphi)}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} &= \\ &= \frac{k \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad k \in (\alpha; \beta), \end{aligned}$$

и следовательно,

$$k(1-k^2)F'_k = k^2 F(k) - F(k) + E(k), \quad k \in (\alpha; \beta) \subset (0; 1),$$

откуда и получаем, что для любого $k \in (0; 1)$ верно равенство

$$F'_k = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k}.$$

§3. Несобственный интеграл, зависящий от параметра

Определение. Пусть для каждого $t \in T$ функция $f(x, t) \in \tilde{R}(a; b)$, причем $f(x, t_0) \notin R(a; b)$ хотя бы для одного $t_0 \in T$.

Тогда функция $F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$ и сам символ $\int_a^b f(x, t) dx$ называются несобственным интегралом, зависящим от параметра t .

Замечание 1. Необходимость исследовать несобственный интеграл, в котором от параметра зависят не только подынтегральная функция, но и пределы интегрирования, возникает крайне редко. Поэтому здесь будем рассматривать только несобственные интегралы, зависящие от параметра такого вида, как определены выше.

Замечание 2. Требование неинтегрируемости в смысле Римана на $\langle a; b \rangle$ функции $f(x, t_0)$ хотя бы для одного значения $t_0 \in T$ существенно, поскольку в противном случае мы имеем дело с уже рассмотренным собственным интегралом, зависящим от параметра. В то же время в целях удобства формулировок и применений соответствующих утверждений не стоит вводить жесткое условие: для всех $t \in T$ функция $f(x, t)$ не интегрируема в смысле Римана на $\langle a; b \rangle$.

Определение. Пусть задан несобственный интеграл

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx.$$

Множеством сходимости (абсолютной сходимости, условной сходимости) этого интеграла называется множество M тех значений t , при которых он сходится (абсолютно сходится, условно сходится).

Пример 25. Для интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^t} dx$ из признаков Аб-

ля-Дирихле и теоремы сравнения получаем, что луч $t > 0$ есть множество сходимости и луч $t > 1$ — множество абсо-

лютой сходимости, полуинтервал $(0; 1]$ — множество условной сходимости.

По тем же соображениям, как и для несобственных интегралов, не зависящих от параметра, будем в дальнейшем из-

ложении рассматривать только интегралы вида $\int_a^\omega f(x, t) dx$,

где $f(x, t) \in R[a; b]$ для всех $[a; b] \subset [a; \omega)$, если не оговорен специально другой вариант.

Определение. Функцию $f(x, t)$, определенную на множестве $X \times T$, называют семейством функций, зависящих от параметра t , если переменная t выделена и называется параметром. Множество T в таком случае называется множеством значений параметра.

Семейство $f(x, t)$ функций, зависящих от параметра t , иногда записывают в виде $f_t(x)$, явно выделяя параметр.

Определение. Пусть $f(x, t)$, $x \in X$, $t \in T$, — семейство функций, зависящих от параметра t , а x_0 — предельная точка множества X . Множество $M \subset T$ тех значений $t \in T$, для которых существует предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) = \varphi(t)$, называется множеством сходимости семейства $f(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$. Функция $\varphi(t)$, $t \in M$, называется предельной функцией или пределом семейства $f(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$.

В дальнейшем для любого множества $E \subset M$ будем коротко говорить: семейство $f(x, t)$ сходится на E при $x \rightarrow x_0$ к $\varphi(t)$, и записывать $\varphi(t) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t)$, $t \in E$, или $f(x, t) \rightarrow \varphi(t)$ при $x \rightarrow x_0$, $t \in E$.

Пример 26. Рассмотрим семейство функций

$$f(x, t) = \sin(t^x), \quad x \geq 0, t \geq 0.$$

Если $0 \leq t < 1$, то при $x \rightarrow +\infty$ имеем, что $t^x \rightarrow 0$ и, следовательно, $f(x, t) \rightarrow 0$. Если $t = 1$, то при любом $x \geq 0$ имеем, что $f(x, t) = \sin 1$. Если $t > 1$, то при $x \rightarrow +\infty$ аргумент синуса неограниченно растет и функция $\sin(t^x)$ при этом не имеет предела. Итак, множеством сходимости семейства $f(x, t) = \sin(t^x)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$, при $x \rightarrow +\infty$ является отрезок $[0; 1]$.

Определение. Пусть семейство $f(x, t)$ сходится на E при $x \rightarrow x_0$ к $\varphi(t)$. Если выполнено условие: для любого положительного числа ε найдется такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что для всех $x \in \dot{U}(x_0) \cap X$ и всех $t \in E$ справедливо неравенство $|f(x, t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, то говорят, что семейство $f(x, t)$ сходится равномерно к $\varphi(t)$ на множестве E при $x \rightarrow x_0$.

Если семейство $f(x, t)$ сходится на E при $x \rightarrow x_0$ к $\varphi(t)$, но не удовлетворяет приведенному выше определению, то говорят, что это семейство сходится к $\varphi(t)$ неравномерно на E при $x \rightarrow x_0$.

Равномерная сходимость семейства $f(x, t)$ к функции $\varphi(t)$ на E при $x \rightarrow x_0$ обозначается символом $f(x, t) \rightrightarrows \varphi(t)$ на E при $x \rightarrow x_0$.

Приведем формальную запись сходимости и равномерной сходимости к $\varphi(t)$ семейства $f(x, t)$ на E при $x \rightarrow x_0$ в случае, когда x_0 — собственная точка числовой прямой и функция $f(x, t)$ при всех $t \in E$ определена в некоторой, может быть, проколотой, окрестности точки x_0 :

$$\begin{aligned} f(x, t) \rightarrow \varphi(t) \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ на } E &\iff \\ \forall t \in E \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(t, \varepsilon): \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \implies \\ &|f(x, t) - \varphi(t)| < \varepsilon; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, t) \rightrightarrows \varphi(t) \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ на } E &\iff \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon): \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta, \forall t \in E \implies \\ &|f(x, t) - \varphi(t)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Предлагаем читателю самостоятельно записать в таком виде определение сходимости и равномерной сходимости на множестве E семейства $f(x, t)$ к $\varphi(t)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Пример 27. Семейство функций

$$f(x, t) = \frac{3t + x}{t + x}, \quad x \in (0; 1), \quad t \in (0; 2),$$

на интервале $(0; 2)$ сходится при $x \rightarrow 0+$ к функции $\varphi(t) = 3$. Покажем, что а) на интервале $(1; 2)$ семейство $f(x, t)$ сходится к $\varphi(t)$ равномерно; б) на интервале $(0; 1)$ семейство $f(x, t)$ сходится к $\varphi(t)$ неравномерно.

Для любого $t \in (0; 2)$ имеем, что $f(x, t) = 3 - \frac{2x}{t + x}$, т. е.

$$|f(x, t) - \varphi(t)| = \frac{2x}{t+x}.$$

Начнем с пункта а). Если $1 < t < 2$ и $x > 0$, то $\frac{2x}{t+x} < 2x$, откуда следует, что если $0 < x < \frac{\varepsilon}{2}$, то для всех $t \in (1; 2)$ выполнено неравенство $|f(x, t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, т. е. $f(x, t) \rightarrow \varphi(t)$ на $(1; 2)$ при $x \rightarrow 0+$.

Переходим к пункту б). Нужно указать такое положительное число ε_0 , что для любого $\delta > 0$ найдутся значения $x_\delta: 0 < x_\delta < \delta$ и $t_\delta \in (0; 2)$, для которых $|f(x_\delta, t_\delta) - \varphi(t_\delta)| \geq \varepsilon_0$. Возьмем $x_\delta = \frac{\delta}{2}$ и $t_\delta = x_\delta$, тогда $\frac{2x_\delta}{t_\delta + x_\delta} = 1$, откуда и следует, что $f(x, t)$ неравномерно сходится к $\varphi(t)$ на $(0; 1)$ при $x \rightarrow 0+$.

Следующие утверждения немедленно следуют из определения равномерной сходимости семейства функций.

1. Если два семейства $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$ равномерно сходятся на множестве E при $x \rightarrow x_0$, то любая их линейная комбинация $\alpha f_1(x, t) + \beta f_2(x, t)$, где α и β — постоянные, равномерно сходится на E при $x \rightarrow x_0$.

2. Если семейство $f(x, t)$ равномерно сходится на множестве E при $x \rightarrow x_0$, то это семейство равномерно сходится при $x \rightarrow x_0$ на любом подмножестве E .

3. Если семейство $f(x, t)$ равномерно сходится на каждом из множеств E_1 и E_2 при $x \rightarrow x_0$, то это семейство при $x \rightarrow x_0$ сходится равномерно на множестве $E_1 \cup E_2$.

Внимание! Это утверждение не переносится на бесконечное объединение множеств, как показывает

Пример 28. Рассмотрим семейство

$$f(x, t) = \frac{\sin tx}{x}, \quad x > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для любого $t \in \mathbb{R}$ имеем: $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x, t) = t$. Из неравенства

$$\left| t - \frac{\sin tx}{x} \right| < \left| \frac{t^3 x^3}{x} \right| = |t^3 x^2|$$

следует, что если $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $|t| \leq n$ и $0 < x < \sqrt{\frac{\varepsilon}{n^3}}$, то $\left| t - \frac{\sin tx}{x} \right| < \varepsilon$. Таким образом, на множестве $E_n = \{t, |t| \leq n\}$ семейство $f(x, t)$ схо-

дится к $\varphi(t) = t$ при $x \rightarrow 0+$ равномерно. Покажем, что на множестве $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ семейство $f(x, t)$ сходится к $\varphi(t)$ при $x \rightarrow x_0$ неравномерно. Для этого нужно указать такое положительное число ε_0 , что для любого числа $\delta > 0$ найдутся числа x_δ , $0 < x_\delta < \delta$, и $t_\delta \in \mathbb{R}$, для которых верно неравенство $\left| t_\delta - \frac{\sin t_\delta x_\delta}{x_\delta} \right| \geq \varepsilon_0$. Действительно, пусть $x_\delta = \min \left\{ \frac{\delta}{2}; 1 \right\}$ и $t_\delta = \frac{2}{x_\delta}$, тогда имеем, что

$$t_\delta - \frac{\sin t_\delta x_\delta}{x_\delta} = \frac{t_\delta x_\delta - \sin t_\delta x_\delta}{x_\delta} = \frac{2 - \sin 2}{x_\delta} \geq \frac{1}{x_\delta} > 1.$$

Итак, семейство $f(x, t) = \frac{\sin tx}{x}$ сходится при $x \rightarrow 0+$ к $\varphi(t) = t$ равномерно на каждом из множеств $E_n = \{t: |t| \leq n\}$ и неравномерно на множестве $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

На практике удобно пользоваться следующим критерием — фактически переформулировкой определения равномерной сходимости: семейство $f(x, t)$, $x \in X$, $t \in E$, сходится при $x \rightarrow x_0$ равномерно на E тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sup_{t \in E} |f(x, t) - \varphi(t)| = 0.$$

Критерий Коши равномерной сходимости семейства функций. Семейство $f(x, t)$, $x \in X$, $t \in T$, равномерно сходится при $x \rightarrow x_0$ на множестве $E \subset T$ тогда и только тогда, когда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что для любой пары $x_1 \in \dot{U}(x_0) \cap X$, $x_2 \in \dot{U}(x_0) \cap X$ и всех $t \in E$ справедливо неравенство $|f(x_1, t) - f(x_2, t)| < \varepsilon$.

Если критерий Коши не выполнен для семейства $f(x, t)$, $x \in X$, $t \in E$, при $x \rightarrow x_0$, т. е. можно указать такое положительное число ε , что для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 найдутся точки x_1 , x_2 из проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ и значения $t_0 \in E$, для которых верно неравенство $|f(x_1, t_0) -$

— $f(x_2, t_0)| \geq \varepsilon$, то говорят, что семейство $f(x, t)$ не сходится равномерно на E при $x \rightarrow x_0$.

Обратите внимание, что говоря “семейство $f(x, t)$ сходится неравномерно при $x \rightarrow x_0$ на E ” мы утверждаем существование предела $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) = \varphi(t)$ для всех $t \in E$. Говоря же “семейство $f(x, t)$ не сходится равномерно на E при $x \rightarrow x_0$ ”, мы не утверждаем, что множество E входит в множество сходимости семейства $f(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$. Только, если сходимости $f(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$ на E заранее известна или доказана, утверждения “ $f(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$ сходится на E неравномерно” и “ $f(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$ не сходится равномерно на E ” эквивалентны.

Теорема о перестановке двух предельных переходов. Пусть $f(x, t)$ — семейство функций, $x \in X$, $t \in T$, x_0 — предельная точка X , t_0 — предельная точка T . Если

1) для любого $x \in X$ существует $\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t) = \psi(x)$,

2) при $x \rightarrow x_0$ семейство $f(x, t)$ сходится равномерно на T к $\varphi(t)$,

то существуют оба предела $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{t \rightarrow t_0} f(x, t))$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t))$ и справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t).$$

Следствие 1. Пусть семейство функций $f(x, t)$, $x \in X$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:

1) для любого $x \in X$ функция $f(x, t)$ непрерывна на T ;

2) семейство $f(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$ сходится равномерно на T к $\varphi(t)$.

Тогда функция $\varphi(t)$ непрерывна на T .

Следствие 2. Пусть семейство функций $f(x, t)$, $x \in X$, $t \in [a; b)$, удовлетворяет условиям:

1) для любого $x \in X$ функция $f(x, t)$ непрерывна на $[a; b)$;

2) семейство $f(x, t)$ при $x \rightarrow x_0$ сходится на $(a; b)$ к $\varphi(t)$.

Тогда, если предел функции $f(x, a)$ при $x \rightarrow x_0$ не существует или не существует предел $\varphi(t)$ при $t \rightarrow a+$, или оба предела существуют, но $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, a) \neq \lim_{t \rightarrow a+} \varphi(t)$, то семейство $f(x, t)$ сходится неравномерно на $(a; b)$ при $x \rightarrow x_0$.

Так, например, в силу следствия 2 семейство $f(x, t) = \sin t^x$, $x \geq 0$, $t \geq 0$, рассмотренное в примере, сходится на интервале $(0; 1)$ и, тем более, на отрезке $[0; 1]$ неравномерно, поскольку при любом $x \geq 0$ функция $\sin t^x$ непрерывна на $[0; 1]$, а предельная функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ \sin 1, & x = 1 \end{cases}$$

разрывна на $(0; 1]$.

Пример 29. Рассмотрим семейство функций

$$f(x, t) = e^{xt} \cos x(t+1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

При любом $x \in \mathbb{R}$ функция $e^{xt} \cos x(t+1)$ непрерывна на $[0; 1]$. Если $x \rightarrow -\infty$, то при $t \in (0; 1)$ имеем, что $e^{xt} \rightarrow 0$, и, следовательно, $\varphi(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{xt} \cos x(t+1) = 0$. В то же время функция $f(x, 0) = \cos x$ не имеет предела при $x \rightarrow -\infty$. Следовательно, в силу следствия 2 семейство $f(x, t) = e^{xt} \cos x(t+1)$ сходится при $x \rightarrow -\infty$ на интервале $(0; 1)$ неравномерно.

Если семейство $f(x, t)$, $x \in X$, $t \in T$, сходится при $x \rightarrow x_0$ к непрерывной на T функции $\varphi(t)$ и для любого $x \in X$ функции $f(x, t)$ непрерывны на T , то сходимость может быть как равномерной, так и неравномерной.

Пример 30. Рассмотрим два семейства $f_1(x, t) = te^{-xt}$, $x \geq 0$, $t \in [0; 1]$ и $f_2(x, t) = xte^{-xt}$, $x \geq 0$, $t \in [0; 1]$. Так как $f_1(x, 0) = f_2(x, 0) = 0$, $\forall x \geq 0$, а для $t > 0$ при $x \rightarrow +\infty$ имеем, что $t = o(e^{-xt})$ и $xt = o(e^{-xt})$, то как семейство $f_1(x, t)$, так и семейство $f_2(x, t)$ при $x \rightarrow +\infty$ сходятся к функции $\varphi(t) = 0$, $t \in [0; 1]$. Покажем, что сходимость семейства $f_1(x, t)$ на отрезке $[0; 1]$ равномерная, а семейства $f_2(x, t)$ — неравномерная.

Действительно, так как для любого $x > 0$, $f_1(x, 0) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(x, t) = 0$ и $(f_1)_t' = e^{-xt}(1 - xt)$, то при $x > 1$ имеем, что $\sup_{t \in [0, 1]} |f_1(x, t)| = \left| f_1\left(x, \frac{1}{x}\right) \right| = \frac{1}{xe}$, и соотношение $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup_{t \in [0, 1]} |f_1(x, t)| = 0$ показывает, что $f_1(x, t) = te^{-xt} \rightrightarrows 0$ при $x \rightarrow +\infty$ на $[0; 1]$.

§ 3. Несобственный интеграл, зависящий от параметра 51

Функция $f_2(x, t) = txe^{-tx}$ при любом $x > 1$ принимает максимальное на $[0; 1]$ значение также в точке $t = \frac{1}{x}$. Но в этом случае величина $\sup_{t \in [0, 1]} |f_2(x, t)| = \left| f_2\left(x, \frac{1}{x}\right) \right| = \frac{1}{e}$ не является бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$, откуда следует, что $f_2(x, t) = txe^{-tx} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ на $[0; 1]$ неравномерно.

Теорема Дини. Пусть семейство функций $f(x, t)$, $x \in X$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:

- 1) множество T есть компакт;
- 2) для любого $x \in X$ функция $f(x, t)$ непрерывна на T ;
- 3) для любого $t \in T$ функция $f(x, t)$ монотонна на X ;
- 4) предельная функция $\varphi(t) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t)$ определена и непрерывна на T .

Тогда $f(x, t) \rightrightarrows \varphi(t)$ при $x \rightarrow x_0$ на T .

Пример 31. Рассмотрим семейство функций

$$f(x, t) = \operatorname{arctg} \frac{1}{t+x}, \quad x > 0, \quad t \in [0; 1].$$

Отрезок $[0; 1]$ — компакт. Для любого $x_0 > 0$ функция $f(x, t) = \operatorname{arctg} \frac{1}{t+x_0}$ непрерывна на $[0; 1]$. Для любого $t_0 \in T$ функция $f(x, t_0) = \operatorname{arctg} \frac{1}{t_0+x}$ монотонна на луче $x > 0$. Так как при $t \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x, t) = \operatorname{arctg} \frac{1}{t}$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, то при $x \rightarrow 0+$ предельной функцией семейства $f(x, t)$ является функция

$$\varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{t}, & t \in (0; 1], \\ \frac{\pi}{2}, & t = 0, \end{cases}$$

определенная и непрерывная на $[0; 1]$. Итак, все условия теоремы Дини выполнены и, следовательно, $f(x, t) \rightrightarrows \varphi(t)$ при $x \rightarrow x_0$ на $[0; 1]$.

Теорема Дини не является полным обращением теоремы о непрерывности предельной функции равномерно сходящегося семейства функций — в ней введены дополнительные

требования компактности множества значений параметра и монотонности функции $f(x, t)$, определяющей семейство, относительно переменной x . Эти условия существенны. Так, например, семейство $f(x, t) = xte^{-xt}$, рассмотренное в примере 30, сходится при $x \rightarrow +\infty$ к непрерывной на $[0; 1]$ функции $\varphi(t) = 0$ неравномерно. Здесь множество значений параметра — компакт, функция $f(x_0, t)$ непрерывна на $[0; 1]$ при любом $x_0 \geq 0$, предельная функция $\varphi(t) = 0$ определена и непрерывна на $[0; 1]$. Нарушено только условие 3 теоремы Дини — функция $f(x, t_0)$ при любом $t_0 \in (0; 1]$ не монотонна на положительной полуоси.

Пример 32. Рассмотрим семейство функций

$$f(x, t) = \frac{t}{1 + xt}, \quad x \geq 0, t \geq 0.$$

Для любого $x_0 \geq 0$ функция $f(x_0, t) = \frac{t}{1 + x_0 t}$ непрерывна на $T = \{t: t \geq 0\}$. Для любого $t_0 \geq 0$ функция $f(x, t_0) = \frac{t_0}{1 + xt_0}$ монотонна на $X = \{x: x \geq 0\}$. Предельная функция $\varphi(t) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x, t) = t$ непрерывна на T . Покажем, что $f(x, t) \rightarrow \varphi(t)$ при $x \rightarrow 0+$ на T неравномерно. Действительно, при каждом $x_0 > 0$ разность $t - \frac{t}{1 + x_0 t} = \frac{x_0 t^2}{1 + x_0 t}$ неограничена на положительной полуоси, т. е. условие $\lim_{x \rightarrow 0+} (\sup_{t \in T} |f(x, t) - \varphi(t)|) = 0$ не выполнено. Здесь нарушено условие 1 теоремы Дини — множество значений параметра не компакт.

Заметим, что на любом отрезке $[0; a]$ выполнены уже все условия теоремы Дини, следовательно, $f(x, t) \rightrightarrows \varphi(t)$ при $x \rightarrow 0+$ на $[0; a]$.

Если множеством значений переменной x является множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел, то семейство $f(x, t)$ представляет собой последовательность $f(n, t)$.

В дальнейшем для краткости вместо “несобственный интеграл, зависящий от параметра” там, где это ясно из контекста, будем говорить просто “интеграл”.

Определение. Пусть множество T есть множество сходи-

мости интеграла $\int_a^\omega f(x, t) dx$ и $E \subset T$. Если для любого положительного числа ε существует такое число B , $a < B < \omega$, что для всех b : $B < b < \omega$ и всех $t \in E$ справедливо неравенство $\left| \int_b^\omega f(x, t) dx \right| < \varepsilon$, то говорят, что интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится равномерно на E .

Заметим, что равномерная сходимость на E интеграла $\int_a^\omega f(x, t) dx$ есть равномерная сходимость семейства функций $F(b, t) = \int_a^b f(x, t) dx$ к $J(t) = \int_a^\omega f(x, t) dx$ при $b \rightarrow \omega -$ на E .

Следующие утверждения являются перефразировкой свойств равномерно и неравномерно сходящихся семейств функций, рассмотренных выше, на случай несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Критерий Коши равномерной сходимости интеграла. Интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится равномерно на мно-

жестве E тогда и только тогда, когда для любого положительного числа ε найдется такое число B , $a < B < \omega$, что для любой пары чисел b_1, b_2 , удовлетворяющих неравенству $B < b_1 < b_2 < \omega$ и любого $t \in E$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, t) dx \right| < \varepsilon.$$

Как и при рассмотрении семейства функций, следует отличать утверждения “интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится неравномерно на множестве E ” и “интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ не сходится равномерно на множестве E ”. Первое утверждение подразу-

мывает, что E есть подмножество множества сходимости интеграла, а второе допускает, что в некоторых (может быть, и всех) точках множества E интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ расходится.

Следующие утверждения непосредственно следуют из определения равномерной сходимости интеграла.

Если интегралы $\int_a^\omega f_1(x, t) dx$ и $\int_a^\omega f_2(x, t) dx$ равномерно сходятся на множестве E , то и интеграл

$$\int_a^\omega (\alpha f_1(x, t) + \beta f_2(x, t)) dx,$$

где α и β — постоянные, равномерно сходится на множестве E .

Если интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ равномерно сходится на множестве E , то он равномерно сходится на любом подмножестве E .

Если интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ равномерно сходится на каждом из множеств E_1 и E_2 , то он равномерно сходится на множестве $E = E_1 \cup E_2$.

Это утверждение не переносится на бесконечное объединение множеств.

Пример 33. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dx$.

а) Покажем, что на множестве $E_n = \left\{ t: t > \frac{1}{n} \right\}$, $n \in \mathbb{N}$, этот интеграл сходится равномерно. Действительно, если $t > \frac{1}{n}$, то для любого $b > 0$ имеем неравенство

$$0 < \int_b^{+\infty} e^{-xt} dx = \frac{1}{t} e^{-bt} < n e^{-\frac{b}{n}}.$$

§ 3. Несобственный интеграл, зависящий от параметра 55

Так как $\lim_{b \rightarrow +\infty} ne^{-\frac{b}{n}} = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $B > 0$, что для всех $b > B$ верно неравенство $0 < \int_b^{+\infty} e^{-xt} dx < \varepsilon$, т. е. по определению интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dx$ сходится равномерно на E_n .

б) Покажем, что на множестве $\mathbb{R}^+ = \{t: t > 0\}$, $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, интеграл сходится неравномерно. Для этого нужно указать такое положительное число ε , что для любого $B > 0$ при некоторых значениях $b > B$ и $t_0 > 0$ справедливо неравенство $\int_b^{+\infty} e^{-xt_0} dx \geq \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = 1$, $b = \max(B + 1, e)$ и $t_0 = \frac{1}{b}$. Тогда $\int_b^{+\infty} e^{-xt_0} dt = \frac{1}{t_0} e^{-bt_0} = \frac{b}{e} \geq 1$, что и требовалось проверить.

Теорема о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра. Если семейство функций $f(x, t)$, $x \in [a; \omega)$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:

1) $f(x, t) \in C([a; \omega) \times T)$,

2) интеграл $\int_a^{\omega} f(x, t) dx$ сходится равномерно на T ,

то функция $J(t) = \int_a^{\omega} f(x, t) dx$ непрерывна на T .

Эта теорема является переносом следствия 1 теоремы о перестановке двух предельных переходов. Переносом следствия 2 является следующее утверждение.

Если семейство функций $f(x, t)$, $x \in [a; \omega)$, $t \in [c; d]$, удовлетворяет условиям:

1) $f(x, t) \in C([a; \omega) \times [c; d])$,

2) для любого $t \in (c; d)$ интеграл $\int_a^{\omega} f(x, t) dx$ сходится,

3) интеграл $\int_a^{\omega} f(x, c) dx$ расходится, или он сходится, но

на $[c; d]$ разрывна функция $J(t) = \int_a^\omega f(x, t) dx$, тогда интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится неравномерно на $(c; d)$.

Пример 34. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^t}$, $t \in [2; 10]$.

Покажем, пользуясь критерием Коши, что этот интеграл сходится равномерно на $[2; 10]$. Действительно, для любой пары b_1, b_2 , $1 < b_1 < b_2$, и любого $t \in [2; 10]$ имеет место неравенство

$$0 < \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^t} \leq \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} b_2 - \operatorname{arctg} b_1.$$

Поскольку функция $\operatorname{arctg} z$ имеет предел при $z \rightarrow +\infty$, то в силу критерия Коши для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $B > 1$, что для любой пары b_1, b_2 из неравенства $B < b_1 < b_2$ следует неравенство $0 < \operatorname{arctg} b_2 - \operatorname{arctg} b_1 < \varepsilon$,

т. е. $0 < \int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{1+x^t} < \varepsilon$ для $B < b_1 < b_2$ и всех $t \in [2; 10]$. Так

как функция $f(x, t) = \frac{1}{1+x^t}$ непрерывна на множестве $[2; 10]$

и интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^t}$ сходится равномерно на $[2; 10]$, то на отрезке $[2; 10]$ функция $J(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^t}$ непрерывна.

Пример 35. Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx} \cos tx}{x} dx$. Для любого $t > 0$ существует такое $x_0(t)$, что $\left| \frac{e^{-tx} \cos tx}{x} \right| \leq \frac{e^{-tx}}{x} < \frac{1}{x^2}$ для всех $x > x_0(t)$. Следовательно, в силу теоремы сравнения интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx} \cos tx}{x} dx$ сходится абсолютно

для всех $t > 0$. Интеграл же $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-0 \cdot x} \cos 0 \cdot x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx} \cos tx}{x} dx$ сходится на луче $t > 0$ и на любом интервале $(0; a)$ неравномерно.

Пример 36. Рассмотрим интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin tx}{x} dx, \quad t \geq 0.$$

Для любого $t > 0$ существует такое $x_0(t)$, что $\left| \frac{e^{-tx} \sin tx}{x} \right| \leq \frac{e^{-tx}}{x} < \frac{1}{x^2}$ для всех $x > x_0(t)$. Следовательно, в силу теоремы сравнения интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin tx}{x} dx$ сходится абсолютно для всех $t > 0$. В отличие от предыдущего примера интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-0 \cdot x} \sin 0 \cdot x}{x} dx = \int_0^{+\infty} 0 dx$$

сходится. Покажем, что функция $J(t) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin tx}{x} dx$ разрывна на $[0; +\infty)$, откуда следует, что интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin tx}{x} dx$$

сходится на $(0; +\infty)$ и, тем более, на $[0; +\infty)$ неравномерно.

Как уже установлено, $J(0) = 0$. Если $t > 0$, то

$$J(t) = \int_t^{+\infty} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du = \int_t^1 \frac{e^{-u} \sin u}{u} du + K,$$

где $K = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du$ (сходимость этого интеграла уже установлена). Функция

$$\varphi(u) = \begin{cases} e^{-u} \frac{\sin u}{u}, & u > 0, \\ 1, & u = 0 \end{cases}$$

интегрируема на $[0; 1]$ в смысле Римана, откуда получаем, что

$$\lim_{t \rightarrow 0+} J(t) = \int_0^1 \frac{e^{-u} \sin u}{u} du + K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du.$$

Итак, для доказательства разрывности функции $J(t)$ на $[0; 1]$ (точнее, справа в нуле) осталось показать, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du \neq 0.$$

Применяя теорему о среднем, получаем, что для любого натурального n имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du = \\ &= \int_{2\pi n}^{\pi(2n+1)} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du + \int_{\pi(2n+1)}^{2\pi(n+1)} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du = 2 \frac{e^{-\xi_1}}{\xi_1} - 2 \frac{e^{-\xi_2}}{\xi_2}, \end{aligned}$$

где $\xi_1 \in (2\pi n; \pi(2n+1))$ и $\xi_2 \in (\pi(2n+1); 2\pi(n+1))$. Так как функция $\frac{e^{-z}}{z}$ монотонно убывает и $\xi_1 < \xi_2$, то

$$\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du > 0$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Так как функция $\frac{e^{-u}}{u}$ не определена при $u = 0$, то оцен-

ку интеграла $\int_0^{2\pi} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du$ проведем другим способом. Из неравенств $\frac{\sin u}{u} \geq 0$, $u \in (0; \pi)$, и $\sin u \geq \frac{2u}{\pi}$, $u \in (0; \pi/2)$, получаем, что

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du > e^{-\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du > e^{-\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u}{u} du \geq e^{-\pi}.$$

Так как $\left| \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du \right| \leq e^{-\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{du}{u} = e^{-\pi} \ln 2$, то окончательно имеем, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du &= \int_0^{\pi} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du - \left| \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du \right| > \\ &> e^{-\pi} (1 - \ln 2) > 0. \end{aligned}$$

Объединяя все полученные неравенства, выводим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du + \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \frac{e^{-u} \sin u}{u} du > 0, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Замечание. Неравномерную сходимость на $[0, +\infty)$ ин-

теграла $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin tx}{x} dx$ можно было доказать и с помощью

критерия Коши, но в данном примере главной целью было

показать разрывность функции $J(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} \sin tx}{x} dx$, а за-

ключение о неравномерной сходимости интеграла есть следствие этого основного факта.

Теорема Дини. Если семейство функций $f(x, t)$, $x \in [a; \omega)$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:

- 1) множество T есть компакт,
 - 2) функция $f(x, t)$ непрерывна и неотрицательна на $[a; \omega) \times T$,
 - 3) функция $J(t) = \int_a^\omega f(x, t) dx$ определена и непрерывна на T ,
- тогда интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится равномерно на T .

Пример 37. Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{t dx}{t^2 + x^2}$, $t \in [0; 1]$.

Множество значений параметра t есть компакт. Функция $f(x, t) = \frac{t}{t^2 + x^2}$ непрерывна и неотрицательна на множестве $[1; +\infty) \times [0; 1]$. Функция

$$J(t) = \int_1^{+\infty} \frac{t dx}{t^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

определена и непрерывна на $[0; 1]$. Все условия теоремы Дини выполнены, следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{t dx}{t^2 + x^2}$ сходится равномерно на $[0; 1]$.

Переходим к свойствам несобственного интеграла, зависящего от параметра, не являющимся перефразировкой сформулированных выше свойств семейства функций. Рекомендуем читателю сравнить все рассматриваемые свойства интеграла с соответствующими свойствами функциональных рядов.

Достаточные признаки равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра

Признак Вейерштрасса (мажорантный признак). Пусть семейство функций $f(x, t)$, $x \in [a; \omega)$, $t \in T$, удовлетворяет условиям:

§ 3. Несобственный интеграл, зависящий от параметра 61

1) для любого $[a; b] \subset [a; \omega)$ функция $f(x, t_0) \in R[a; b]$ при любом $t_0 \in T$;

2) существует функция $g: [a; \omega) \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что при всех $x \in [a; \omega]$, $t \in T$ справедливо неравенство $|f(x, t)| \leq g(x)$ (мажорантная функция семейства $f(x, t)$ на T) и интеграл $\int_a^\omega g(x) dx$ сходится.

Тогда интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится абсолютно и равномерно на множестве T .

Пример 38. Показать, что интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ сходится равномерно на положительной полуоси.

Решение. Функция $f(x, t_0) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2t_0^2)}$ непрерывна на множестве $[0; 1)$ при любом $t_0 \in [0; +\infty)$, следовательно, для любого b , $0 < b \leq 1$, функция $f(x, t_0) \in R[0; b]$. Так как $0 < \frac{1}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ для любого $t \in [0; +\infty)$

и интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится, то в силу признака Вейерштрасса данный интеграл сходится равномерно на положительной полуоси.

Признак Вейерштрасса представляет собой аналог теоремы сравнения для несобственных интегралов, независимых от параметра. Существенное отличие этих двух утверждений состоит в том, что в теореме сравнения требовалось выполнение неравенства $|f(x)| \leq g(x)$ локально слева в точке ω , а в признаке Вейерштрасса требуется выполнение неравенства $|f(x, t)| \leq g(x)$ как для всех $t \in T$, так и для всех $x \in [a; \omega)$. Дело в том, что если $g(x) \in \tilde{R}[a; \omega)$ и неравенство $|f(x, t)| \leq g(x)$ для каждого $t \in T$ выполнено для $x_0(t) < x < \omega$, т. е. левая полуокрестность точки ω , в которой это неравенство справедливо, зависит от значения t , то интеграл может сходиться неравномерно. Приведем соответствующий пример.

Пример 39. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}} dx$, если
 а) $T = (0; A)$, $0 < A < +\infty$, и б) $T = (0; +\infty)$.

Покажем, что в случае а) данный интеграл сходится равномерно, пользуясь признаком Вейерштрасса. Действительно, из неравенства $0 < t < A$ следует, что

$$|\ln x|^t \leq \max\{1, |\ln x|^A\}.$$

Таким образом, функция $g(x) = \frac{1 + |\ln x|^A}{\sqrt{x}}$ является мажорантной функцией семейства $f(x, t) = \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}}$ для $t \in (0; A)$. Так как существует такое X , что $1 + |\ln x|^A < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ для $x \in (0; X)$, то функция $g(x)$ локально справа в точке 0 удовлетворяет неравенству $0 < g(x) < \frac{1}{x^{3/4}}$, следовательно, сходится интеграл $\int_0^1 g(x) dx$, и в силу признака Вейерштрасса интеграл $\int_0^1 \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}} dx$ сходится равномерно на $(0; A)$.

Покажем, что в случае б) данный интеграл сходится неравномерно. Действительно, сходимость этого интеграла для любого $t \in (0; +\infty)$ показана в пункте а). Далее, для любой пары b_1, b_2 из неравенства $0 < b_1 < b_2 < \frac{1}{e}$ следует неравенство $\int_{b_1}^{b_2} \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}} dx > 2|\ln b_2|^t(\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1})$. Если числа b_1 и b_2 фиксированы, то $\lim_{t \rightarrow \infty} 2|\ln b_2|^t(\sqrt{b_2} - \sqrt{b_1}) = +\infty$, следовательно, для любого $M > 0$ и любой пары b_1, b_2 , удовлетворяющей неравенству $0 < b_1 < b_2 < \frac{1}{e}$, найдется такое значение $t \in (0; +\infty)$, что $\int_{b_1}^{b_2} \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}} dx > M$. В силу критерия Коши

§ 3. Несобственный интеграл, зависящий от параметра 63

отсюда следует, что интеграл $\int_0^1 \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}} dx$ сходится неравномерно на луче $(0; +\infty)$.

Теперь обратим внимание на то, что для любого $t \in (0; +\infty)$ неравенство $0 < \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{3/4}}$ верно, если $0 < x < x_0(t)$, т. е. для каждого $t \in (0; +\infty)$ оценка $0 < \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}} < \frac{1}{x^{3/4}}$ справедлива локально справа в точке 0. Но, как было показано, из этого факта и интегрируемости функции $g(x) = \frac{1}{x^{3/4}}$ на $[0; 1]$ не следует равномерной сходимости интеграла $\int_0^1 \frac{|\ln x|^t}{\sqrt{x}} dx$ на луче $(0; +\infty)$.

Пример 40. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-t)^2 + 1}$, если а) $t \in (0; A)$ и б) $t \in (0; +\infty)$.

Покажем, пользуясь признаком Вейерштрасса, что в случае а) данный интеграл сходится равномерно. Если $t_1 < t_2$, то неравенство $\frac{1}{(x-t_1)^2 + 1} < \frac{1}{(x-t_2)^2 + 1}$ верно только на луче $x > c(t_1, t_2)$, где $t_1 < c(t_1, t_2) < t_2$ (см. рис. 1). Таким образом, функция $g_1(x) = \frac{1}{(x-A)^2 + 1}$ не является мажорантой семейства $f(x, t) = \frac{1}{(x-t)^2 + 1}$ для $t \in (0; A)$. Поскольку для любого $t \in (0; +\infty)$ имеем, что $0 \leq f(x, t) \leq 1$, то функция $g_2(x) = 1$ является мажорантой семейства $f(x, t)$ для $t \in (0; A)$ и для $t \in (0; +\infty)$, но интеграл $\int_0^{+\infty} g_2(x) dx = \int_0^{+\infty} dx$ расходится. Возьмем функцию

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq A, \\ \frac{1}{(x-A)^2 + 1}, & x > A. \end{cases}$$

Эта функция уже удовлетворяет обоим условиям: она являет-

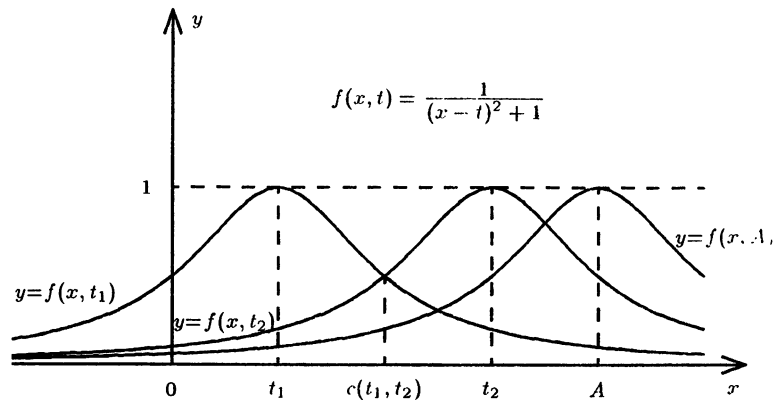


Рис. 1

ся majorантой семейства $f(x, t) = \frac{1}{(x-t)^2 + 1}$ для $t \in (0; A)$ и интеграл $\int_0^{+\infty} g(x) dx$ сходится, так как $g(x) \sim \frac{1}{x^2}$ при $x \rightarrow +\infty$.

Покажем, что в случае б) данный интеграл сходится неравномерно, пользуясь критерием Коши. Действительно, сходимость этого интеграла для любого $t \in (0; +\infty)$ показана в пункте а). Далее, так как максимальное значение функция $f(x, t) = \frac{1}{(x-t)^2 + 1}$ принимает в точке $x = t$, то для того,

чтобы получить интеграл $\int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{(x-t)^2 + 1}$ большой величины естественно взять числа b_1, b_2 так, чтобы $b_1 < t < b_2$. Пусть $b_1 = t - 1, b_2 = t + 1$, тогда

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{(x-t)^2 + 1} = \int_{-1}^1 \frac{dz}{z^2 + 1} = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, для любого $B > 0$ найдется значение $t = B + 2$ на луче $(0; +\infty)$ и числа $b_1 = t - 1 = B + 1, b_2 = t + 1 = B + 3$

такие, что $B < b_1 < b_2$ и $\int_{b_1}^{b_2} \frac{dx}{(x-t)^2+1} = \frac{\pi}{2}$, т. е. интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x-t)^2+1}$ сходится неравномерно на луче $(0; +\infty)$.

В обоих приведенных примерах неравномерная сходимость интеграла на соответствующем множестве доказывалась с помощью критерия Коши.

Разумеется, если интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится неравномерно на множестве T , то никакая мажорантная функция $g(x)$ семейства $f(x, t)$, $t \in T$, не интегрируема на $[a; \omega)$. Но неинтегрируемость наиболее точной мажорантной функции $g(x) = \sup_{t \in T} |f(x, t)|$ на $[a; \omega)$ еще не обозначает, что интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ не сходится равномерно на T . Во-первых, если интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ при некоторых $t \in T$ сходится условно, то его равномерная сходимость заведомо не может быть установлена с помощью признака Вейерштрасса, поскольку из выполнения условий этого признака следует абсолютная сходимость рассматриваемого интеграла на T . Во-вторых, даже в случае абсолютной и равномерной сходимости на множестве T интеграла $\int_a^\omega f(x, t) dx$ функция $g(x) = \sup_{t \in T} |f(x, t)|$ может не интегрироваться на $[a; \omega)$. Приведем соответствующий пример.

Пример 41. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{t dx}{(tx-1)^2 - \ln t}$, $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$. Множество значений t не является компактом. Доопределим функцию $f(x, t) = \frac{t}{(tx-1)^2 - \ln t}$, $x \geq 0$, $t \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$, положив $f(x, 0) = 0$ для всех $x > 0$. Тогда к инте-

гралу $\int_0^{+\infty} f(x, t) dx$ применима теорема Дини. Действительно, множество значений t — отрезок $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ — есть компакт, функция $f(x, t)$ неотрицательна на множестве $[0; +\infty) \times \left[0; \frac{1}{2}\right]$, неравенство $0 < f(x, t) \leq \frac{t}{\ln 2}$ показывает, что $f(x, t)$ непрерывна на этом множестве, функция

$$J(t) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dx = \begin{cases} \int_{-1}^{+\infty} \frac{dz}{z^2 - \ln t} = \frac{1}{\sqrt{|\ln t|}} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{|\ln t|}} \right), & t \in \left(0; \frac{1}{2}\right], \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

определена и непрерывна на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} f(x, t) dx$ сходится равномерно на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ и, тем более, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{t dx}{(tx - 1)^2 - \ln t}$ сходится равномерно на $\left(0; \frac{1}{2}\right]$.

В то же время для $x > 2$ имеем неравенство

$$g(x) = \sup_{t \in (0, \frac{1}{2}]} f(x, t) \geq f\left(x, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x \ln x},$$

т. е. функция $g(x)$ локально слева в $+\infty$ совпадает с функцией $\frac{1}{x \ln x}$, и, так как интеграл $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ расходится, то расходится и интеграл $\int_0^{+\infty} g(x) dx$.

Признак Абеля—Дирихле равномерной сходимости интеграла, зависящего от параметра. Пусть функции $f(x, t)$: $x \in [a; \omega)$, $t \in T$, и $g(x, t)$: $x \in [a; \omega)$, $t \in T$, при ка-

ждом $t \in T$ интегрируемы в смысле Римана на любом отрезке $[a; b] \subset [a; \omega)$. Если при этом выполнена одна из следующих пар условий:

а₁) функция $F(b, t) = \int_a^b f(x, t) dx$ ограничена на $[a; \omega) \times T$,

б₁) при любом $t \in T$ функция $g(x, t)$ монотонна на $[a; \omega)$ и $g(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \omega-$ на T ;

а₂) интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится равномерно на T ,

б₂) функция $g(x, t)$ ограничена на $[a; \omega) \times T$ и при любом $t \in T$ монотонна на $[a; \omega)$.

Тогда интеграл $\int_a^\omega f(x, t)g(x, t) dx$ сходится равномерно на T .

Так же, как и для несобственных интегралов, независимых от параметра, область применения признака Абеля—Дирихле, в основном, неабсолютно сходящиеся интегралы. При этом иногда одна или обе функции $f(x, t)$, $g(x, t)$ не зависят от t . Тогда соответствующая сходимость, естественно, является равномерной на рассматриваемом множестве значений параметра t .

Пример 42. Показать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin tx}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$.

Решение. Положим $f(x, t) = t \sin tx$ и $g(x, t) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Функция $g(x, t)$ монотонна на $[0; +\infty)$ и, поскольку эта функция не зависит от t , $g(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ на $[0; 1]$. Далее,

$$\left| \int_0^b f(x, t) dx \right| = \left| \int_0^b t \sin tx dx \right| = | -\cos tb + 1 | \leq 2.$$

Итак, выполнены условия а) и б) признака Абеля—Дирихле и, следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin tx}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$.

Пример 43. Показать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{t^2 \cos tx}{x+t^2} dx$ сходится равномерно на $[0; +\infty)$.

Решение. Положим $f(x, t) = t \cos tx$ и $g(x, t) = \frac{t}{x+t^2}$. Функция $g(x, t)$ монотонна на $[1; +\infty)$ при любом $t \in [0; +\infty)$, а неравенство $0 \leq g(x, t) < \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in [1; +\infty)$, $t \in [0; +\infty)$, показывает, что $g(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ на $[0; +\infty)$. Далее,

$$\left| \int_1^b t \cos tx \, dx \right| = |\sin bt - \sin t| \leq 2, \quad t \in [0; +\infty), \quad b \in [1; +\infty).$$

Итак, выполнены условия а) и б) признака Абеля—Дирихле и, следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{t^2 \cos tx}{x+t^2} dx$ сходится равномерно на $[0; +\infty)$.

Пример 44. Показать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{2x-t} \operatorname{arctg} tx \, dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$.

Решение. Если положить $f(x, t) = \cos x$ и $g(x, t) = \frac{\operatorname{arctg} tx}{2x-t}$, то неравенство $\left| \int_1^b f(x, t) \, dx \right| = \left| \int_1^b \cos x \, dx \right| \leq 2$ верно для всех $t \in [0; 1]$ и $b \in [1; +\infty)$, но монотонность функции $g(x, t)$ не очевидна — и числитель, и знаменатель при $t > 0$ растут с ростом x — следовательно, требуется дополнительное исследование. В данном случае проще представить подынтегральную функцию в виде произведения $\frac{\cos x}{2x-t} \cdot \operatorname{arctg} tx$ и проверить выполнение второй пары условий признака Абеля—Дирихле. Действительно, поскольку, как уже установлено, функция $F(b, t) = \int_1^b \cos x \, dx$ ограничена на $[1; +\infty) \times [0; 1]$ и

неравенство $\frac{1}{2x-t} \leq \frac{1}{2x-1}$, $x \in [1; +\infty)$, $t \in [1; 2]$, показывает, что функция $\frac{1}{2x-t}$ монотонна и равномерно сходится к нулю при $x \rightarrow +\infty$ на $[0; 1]$, то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{2x-t}$ сходится равномерно на $[0; 1]$. Функция $g(x, t) = \arctg tx$ ограничена на $[1; +\infty) \times [0; 1]$ и при любом $t \in [0; 1]$ монотонна на $[1; +\infty)$. Следовательно, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{2x-t} \arctg tx \, dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$.

Пример 45. Показать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(x + \frac{t}{x})}{x} \, dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$.

Решение. При любом $t \neq 0$ функция $f(x, t) = \frac{t \sin(x + \frac{t}{x})}{x}$ на $(0; +\infty)$ имеет две особые точки — 0 и $(+\infty)$. В таком случае, как и для интеграла, независимого от параметра, промежуток интегрирования разбивается на два так, чтобы на полученных промежутках только одна и при этом краевая точка являлась особой для подынтегральной функции, интеграл сходится равномерно тогда и только тогда, когда равномерно сходятся интегралы по каждому из полученных промежутков.

Следуя этому правилу, представим данный интеграл в виде

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \sin(x + \frac{t}{x})}{x} \, dx = \int_0^{1/2} \frac{t \sin(x + \frac{t}{x})}{x} \, dx + \int_{1/2}^{\infty} \frac{t \sin(x + \frac{t}{x})}{x} \, dx$$

и проверим, что каждое из слагаемых есть равномерно сходящийся на $[0; 1]$ интеграл.

Интеграл $\int_0^{1/2} \frac{t \sin(x + \frac{t}{x})}{x} \, dx$, в свою очередь, представля-

ется суммой $\int_0^{1/2} \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x} dx + \int_0^{1/2} \frac{t \cos x \sin \frac{t}{x}}{x} dx$.

Рассмотрим каждое слагаемое отдельно. Неравенство

$$\left| \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x} \right| \leq \left| t \cos \frac{t}{x} \right| \leq 1, \quad x \in \left(0; \frac{1}{2}\right), \quad t \in [0; 1],$$

показывает, что интеграл $\int_0^{1/2} \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x} dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$ (заметим, что $\frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x} \in R \left[0; \frac{1}{2}\right]$ для всех $t \in [0; 1]$, но равномерная сходимость интеграла является следствием ограниченности функции двух переменных $g(x, t) = \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x}$ на $\left(0; \frac{1}{2}\right) \times [0; 1]$). Положительную функцию во втором слагаемом представим как произведение следующим образом: $\frac{t \cos x \sin \frac{t}{x}}{x} = \frac{t}{x^2} \cdot \sin \frac{t}{x} \cdot x \cos x$. Так как $g(x, t) = x \cos x$ не зависит от t , то $g(x, t) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0+$ на $[0; 1]$, а неравенство $(x \cos x)' = \cos x - x \sin x > 0$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, показывает, что $g(x)$ монотонна на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. Функция $F(b, t) = \int_b^{1/2} \frac{t}{x^2} \sin \frac{t}{x} dx$ ограничена на $\left(0; \frac{1}{2}\right) \times [0; 1]$. Итак, интеграл $\int_0^{1/2} \frac{t \sin \left(x + \frac{t}{x}\right)}{x} dx$ как сумма двух равномерно сходящихся на $[0; 1]$ интегралов сходится равномерно на $[0; 1]$.

Интеграл $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{t \sin \left(x + \frac{t}{x}\right)}{x} dx$ тоже разобьем на два слагаемых

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x} dx + \int_{1/2}^{+\infty} \frac{t \cos x \sin \frac{t}{x}}{x} dx$$

и будем рассматривать каждое из них.

Так как

$$\left| \frac{t \cos x \sin \frac{t}{x}}{x} \right| \leq \frac{t^2}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \quad x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right), \quad t \in [0; 1],$$

то в силу признака Вейерштрасса интеграл $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{t \cos x \sin \frac{t}{x}}{x} dx$ сходится равномерно и абсолютно на $[0; 1]$.

В первом слагаемом подынтегральную функцию удобно представить как произведение $\frac{\sin x}{x} \cdot t \cos \frac{t}{x}$ (если же взять произведение $\sin x \cdot \frac{t \cos \frac{t}{x}}{x}$, то придется дополнительно проверять монотонность функции $\frac{\cos \frac{t}{x}}{x}$ на $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right)$ при $t \in [0; 1]$).

Интеграл $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится в силу признака Абеля—Дирхле,

а поскольку подынтегральная функция не зависит от t , то эта сходимость равномерна на $[0; 1]$. Функция $g(x, t) = t \cos \frac{t}{x}$ ограничена на $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right) \times [0; 1]$ и монотонна на

$\left[\frac{1}{2}; +\infty \right)$ при любом $t \in [0; 1]$. Итак, интеграл $\int_{1/2}^{+\infty} \frac{t \sin x \cos \frac{t}{x}}{x} dx$

сходится равномерно на $[0; 1]$, следовательно, интеграл

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{t \sin \left(x + \frac{t}{x} \right)}{x} dx \text{ сходится равномерно на } [0; 1].$$

Объединяя все вышесказанное, получаем, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \sin \left(x + \frac{t}{x} \right)}{x} dx \text{ сходится равномерно на } [0; 1].$$

Сравнивая формулировки признаков Абеля—Дирихле для сходимости несобственного интеграла, независимого от параметра, и для равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра, видим, что требование локальной монотонности слева в точке ω функции $g(x)$ заменено требованием монотонности функции $g(x, t)$ при фиксированном t на всем промежутке $[a; \omega)$. Если же функция $g(x, t)$ монотонна на промежутке $[b(t); \omega)$, где $a \leq b(t) < \omega$, то равномерная сходимость интеграла $\int_a^\omega f(x, t) dx$ на T и ограниченность $g(x, t)$ на $[a; \omega) \times T$ не гарантируют равномерную сходимость интеграла $\int_a^\omega f(x, t)g(x, t) dx$ на T . Приведем соответствующий пример.

Пример 46. Для $t \in (0; 1]$ найдем натуральное число $n(t)$ такое, что $\sum_{q=1}^{n(t)} \frac{1}{q} > \frac{1}{t}$. Положим

$$g(x, t) = \begin{cases} \sin tx, & 1 \leq x \leq \frac{\pi(4n+5)}{2t}, \quad t \in (0; 1], \\ \frac{\pi(4n+5)}{2tx}, & x > \frac{\pi(4n+5)}{2t}, \quad t \in (0; 1], \\ 0, & x \geq 1, \quad t = 0, \end{cases}$$

где $n = n(t)$, и

$$f(x, t) = \frac{t \sin tx}{x}.$$

Тогда получим, что

$$1) \text{ так как функция } F(b, t) = \int_0^b t \sin tx \, dx = \cos t - \cos bx$$

ограничена на $[1; +\infty) \times [0; 1]$, функция $\frac{1}{x}$ монотонна на $[1; +\infty)$

и $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$ на $[0; 1]$, то интеграл $\int_1^{+\infty} f(x, t) dx$ схо-

дится равномерно на $[0; 1]$;

2) функция $g(x, t)$ непрерывна и ограничена на $[1; +\infty) \times [0; 1]$ и при каждом $t \in [0; 1]$ локально монотонна слева в $+\infty$.

Следовательно, при каждом фиксированном $t \in [0; 1]$ интеграл $\int_1^{+\infty} f(x, t)g(x, t) dx$ сходится в силу признака Абеля—Дирхле. Покажем, пользуясь критерием Коши, что сходимость этого интеграла на $[0; 1]$ неравномерная.

Пусть $t \in (0; 1]$, $b_1 = \frac{2\pi}{t}$, $b_2 = \frac{2\pi(n(t) + 1)}{t}$, тогда

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x, t)g(x, t) dx = \int_{b_1}^{b_2} \frac{t \sin^2 tx}{x} dx = t \sum_{q=1}^{n(t)} \int_{\frac{2q\pi}{t}}^{\frac{2\pi(q+1)}{t}} \frac{\sin^2 tx}{x} dx.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то

$$\int_{\frac{2\pi q}{t}}^{\frac{2\pi(q+1)}{t}} \frac{\sin^2 tx}{x} dx \geq \int_{\frac{2\pi q + \pi/4}{t}}^{\frac{2\pi q + 3\pi/4}{t}} \frac{\sin^2 tx}{x} dx.$$

Так как $\sin^2 tx \geq \frac{1}{2}$ для $x \in \left[\frac{2\pi q + \pi/4}{t}; \frac{2\pi q + 3\pi/4}{t} \right]$, $q \in \mathbb{N}$, то

$$\int_{\frac{2\pi q + \pi/4}{t}}^{\frac{2\pi q + 3\pi/4}{t}} \frac{\sin^2 tx}{x} dx \geq \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi q + 3\pi/4}{2\pi q + \pi/4} > \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4\pi q + \pi/2} > \frac{1}{10q},$$

$q \in \mathbb{N}.$

Объединяя все полученные неравенства, имеем, что

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x, t)g(x, t) dx \geq \frac{t}{10} \sum_{q=1}^{n(t)} \frac{1}{q} > \frac{1}{10}.$$

Итак, для любого $B > 1$ возьмем такое $t_0 \in (0; 1]$, что $\frac{2\pi}{t_0} > B$; тогда числа $b_1 = \frac{2\pi}{t_0}$ и $b_2 = \frac{2\pi(n(t) + 1)}{t_0}$ удовлетворяют нера-

венству $B < b_1 < b_2$ и $\int_{b_1}^{b_2} f(x, t_0)g(x, t_0) dx > \frac{1}{10}$, откуда следует, что $\int_1^{+\infty} f(x, t)g(x, t) dx$ сходится неравномерно на $[0; 1]$.

Теорема об интегрировании несобственного интеграла по параметру. Пусть семейство функций $f(x, t)$, $x \in [a; \omega)$, $t \in [c; d]$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x, t) \in C([a; \omega) \times [c; d])$;

2) интеграл $J(t) = \int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится равномерно на $[c; d]$.

Тогда справедливо равенство

$$\int_c^d \left(\int_a^\omega f(x, t) dx \right) dt = \int_a^\omega \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx.$$

Заметим, что функция $J(t)$ в силу теоремы о непрерывности несобственного интеграла непрерывна и, следовательно, интегрируема на $[c; d]$.

Пример 47. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$, пользуясь формулой $\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dt}{1+x^2t^2}$, $x > 0$.

Решение. Запишем данный интеграл в виде

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dt}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

Покажем, что функция $f(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет условиям теоремы об интегрировании несобственного интеграла по параметру и, следовательно,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, t) dt \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, t) dx \right) dt.$$

Функция $f(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна на $[0; 1) \times [0; 1]$. Для $t \in [0; 1]$ имеем, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^{\pi/2} \frac{dz}{1+t^2 \sin^2 z} = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+t^2+u^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ сходится для любого $t \in [0; 1]$. Поскольку множество значений t есть компакт, функция $\frac{1}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ неотрицательна и непрерывна на $[0; 1) \times [0; 1]$ и функция $J(t) = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}$ непрерывна на $[0; 1]$, то в силу теоремы Дини интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}}$ сходится на $[0; 1]$ равномерно. Итак,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x \, dx}{x\sqrt{1-x^2}} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2t^2)\sqrt{1-x^2}} \right) dt = \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \ln(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Пример 48. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-\beta x} dx$, $\beta > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Запишем данный интеграл в виде

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^a e^{-\beta x} \cos tx \, dt \right) dx.$$

Покажем, что при любых $\beta > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ функция $f(x, t) = e^{-\beta x} \cos tx$ удовлетворяет условиям теоремы об интегрировании несобственного интеграла по параметру и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{\sin ax e^{-\beta x}}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a f(x, t) \, dt \right) dx = \\ &= \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} f(x, t) \, dx \right) dt = \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos tx \, dx \right) dt. \end{aligned}$$

Функция $f(x, t) = e^{-\beta x} \cos tx$ непрерывна на $[0; +\infty) \times [0; a]$, $a \in \mathbb{R}$. Так как для любого $\beta > 0$ интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} dx$ сходится, то неравенство $|f(x, t)| \leq e^{-\beta x}$, $t \in [0; a]$, показывает, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos tx \, dx$ сходится равномерно на $[0; a]$ в силу признака Вейерштрасса. Итак,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax e^{-\beta x}}{x} dx &= \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos tx \, dx \right) dt = \\ &= \int_0^a \frac{\beta}{\beta^2 + t^2} dt = \operatorname{arctg} \frac{a}{\beta}, \quad \beta > 0, \quad a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Пример 49. Вычислить интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$, $a \in \mathbb{R}$.

Решение. Воспользуемся результатом предыдущего примера: $J(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin ax}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{a}{t}$, $t > 0$. Интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin ax}{x} dx$ сходится равномерно на множестве $[0; 1]$ в силу признака Абеля—Дирихле, поскольку интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$, функция e^{-tx} монотонна на $[0; +\infty)$ при любом $t \in [0; 1]$ и $0 < e^{-tx} \leq 1$ для всех $x \in [0; +\infty)$, $t \in [0; 1]$. Следовательно, в силу теоремы о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, функция $J(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin ax}{x} dx$ непрерывна на $[0; 1]$, откуда получаем, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = J(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} J(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \operatorname{arctg} \frac{a}{t} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a.$$

Внимание! В приведенных примерах вычисления несобственных интегралов проверка выполнения условий теоремы об интегрировании несобственного интеграла по параметру — существенная часть решения. Отсутствие такой проверки — грубая ошибка, и формальное вычисление никоим образом не представляет решения.

Приведем пример, показывающий, что условие равномерной сходимости интеграла $J(t) = \int_a^{\omega} f(x, t) dx$ на $[c; d]$ существенно для справедливости равенства

$$\int_c^d J(t) dt = \int_a^{\omega} \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx.$$

Пример 50. Функция $f(x, t) = t \operatorname{arccotg} tx^2 - \frac{2x^2 t^2}{1 + t^2 x^4}$ опре-

делена и непрерывна на множестве $[0; +\infty) \times [0; 1]$. Так как

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_0^{+\infty} f(x, t) dx = \int_0^{+\infty} \left(t \operatorname{arctg} tx^2 - \frac{2x^2 t^2}{1+t^2 x^4} \right) dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} bt \operatorname{arctg} b^2 t = 0 \end{aligned}$$

для всех $t \in [0; 1]$, то $\int_0^1 J(t) dt = 0$. Функция

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^1 f(x, t) dt = \int_0^1 \left(t \operatorname{arctg} tx^2 - \frac{2x^2 t^2}{1+t^2 x^4} \right) dt = \\ &= \frac{t^2}{2} \operatorname{arctg}(tx^2) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2 x^2}{1+t^2 x^4} dt - 2 \int_0^1 \frac{x^2 t^2}{1+t^2 x^4} dt = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{3}{2x^2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2 x^4} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + \frac{3}{2x^4} \operatorname{arctg} tx^2 \Big|_0^1 - \frac{3}{2x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{3}{2x^2} + \frac{3}{2x^4} \operatorname{arctg} x^2, \quad x \neq 0, \end{aligned}$$

непрерывна на $[0; +\infty)$, если $\varphi(0) = \frac{\pi}{4}$, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2x^4} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{3}{2x^2} \right) = 0.$$

Найдем первообразную $F(x)$ функции $\varphi(x)$ на произвольном отрезке $[a; b] \subset (0; +\infty)$.

Так как x не обращается в нуль на $[a; b]$, то

$$\begin{aligned} F(x) + C &= \int \varphi(x) dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{3}{x^2} + \frac{3}{2x^4} \operatorname{arctg} x^2 \right) dx = \\ &= \frac{x}{2} \operatorname{arctg} x^2 + \int \frac{x^2}{1+x^4} dx + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} x^2 d\left(\frac{1}{x^3}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x}{2} \operatorname{arccctg} x^2 + \frac{3}{2x} + \int \frac{x^2}{1+x^4} dx - \frac{1}{2x^3} \operatorname{arctg} x^2 + \\
 &+ \int \frac{dx}{x^2(1+x^4)} = \frac{x}{2} \operatorname{arccctg} x^2 + \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^3} \operatorname{arctg} x^2 + \\
 &+ \int \frac{dx}{x^2} + 2 \int \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \\
 &= \frac{x}{2} \operatorname{arccctg} x^2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^3} \operatorname{arctg} x^2 + 2 \int \frac{x^2 dx}{1+x^4}.
 \end{aligned}$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^3} \operatorname{arctg} x^2 \right) = 0$, то

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2b} + \frac{b}{2} \operatorname{arccctg} b^2 - \right. \\
 &\left. - \frac{\operatorname{arctg} b^2}{2b^3} \right) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \neq 0 = \int_0^1 J(t) dt.
 \end{aligned}$$

В теореме об интегрировании несобственного интеграла по параметру речь идет об интегрировании функции $J(t) = \int_a^\omega f(x, t) dx$ в смысле Римана. Если же рассматривается несобственный интеграл $\int_c^{\tilde{\omega}} J(t) dt$, то обычно используют термин “перестановка двух несобственных интегралов”.

Теорема о перестановке двух несобственных интегралов. Пусть семейство функций $f(x, t)$, $x \in [a; \omega)$, $t \in [c; \tilde{\omega})$, удовлетворяет условиям:

1) $f(x, t) \in C([a; \omega) \times [c; \tilde{\omega}))$;

2) интеграл $F(t) = \int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[c; d] \subset [c; \tilde{\omega})$, интеграл $\Phi(x) = \int_c^{\tilde{\omega}} f(x, t) dt$ сходится равномерно на любом отрезке $[a; b] \subset [a; \omega)$;

3) существует хотя бы один из двух интегралов

$$\int_a^{\omega} \left(\int_c^{\tilde{\omega}} |f(x, t)| dt \right) dx \text{ или } \int_c^{\tilde{\omega}} \left(\int_a^{\omega} |f(x, t)| dx \right) dt.$$

Тогда справедливо равенство

$$\int_a^{\omega} \Phi(x) dx = \int_c^{\tilde{\omega}} F(t) dt$$

или

$$\int_a^{\omega} \left(\int_c^{\tilde{\omega}} f(x, t) dt \right) dx = \int_c^{\tilde{\omega}} \left(\int_a^{\omega} f(x, t) dx \right) dt.$$

Используя теорему Дини, получим следующее

Следствие. Пусть семейство функций $f(x, t)$, $x \in [a; \omega)$, $t \in [c; \tilde{\omega})$, удовлетворяет условиям:

1) функция $f(x, t)$ непрерывна и неотрицательна на $[a; \omega) \times [c; \tilde{\omega})$;

2) функции $F(t) = \int_a^{\omega} f(x, t) dx$ и $\Phi(x) = \int_c^{\tilde{\omega}} f(x, t) dt$ непрерывны на $[c; \tilde{\omega})$ и $[a; \omega)$ соответственно;

3) существует один из интегралов $\int_c^{\tilde{\omega}} F(t) dt$ или $\int_a^{\omega} \Phi(x) dx$.

Тогда существуют оба эти интеграла и

$$\int_c^{\tilde{\omega}} F(t) dt = \int_a^{\omega} \Phi(x) dx$$

или

$$\int_c^{\tilde{\omega}} \left(\int_a^{\omega} f(x, t) dx \right) dt = \int_a^{\omega} \left(\int_c^{\tilde{\omega}} f(x, t) dt \right) dx.$$

Пример 51. Вычислить интеграл Эйлера—Пуассона

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, \text{ используя перестановку двух несобственных}$$

§ 3. Несобственный интеграл, зависящий от параметра 81

интегралов.

Решение. Положим $\psi(t) = \int_0^{+\infty} t e^{-(xt)^2} dx$, тогда $\psi(0) = 0$

и $\psi(t) = \int_0^{+\infty} t e^{-(xt)^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = J$ при $t > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} t e^{-(1+x^2)t^2} dx \right) dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \psi(t) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} J dt = J \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = J^2. \end{aligned}$$

Функция $f(x, t) = t e^{-(1+x^2)t^2}$ непрерывна и неотрицательна

на $[0; +\infty) \times [0; +\infty)$. Функция $\Phi(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-(1+x^2)t^2} dt =$

$= \frac{1}{2(1+x^2)}$ непрерывна на $[0; +\infty)$ и интеграл $\int_0^{+\infty} \Phi(x) dx =$

$= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$ сходится. Функция же $F(t) =$

$= \int_0^{+\infty} t e^{-(1+x^2)t^2} dx = e^{-t^2} \psi(t)$ непрерывна только на луче

$[\varepsilon; +\infty)$, где $\varepsilon > 0$. Таким образом, условия следствия теоремы о перестановке двух несобственных интегралов выполнены для семейства $f(x, t)$, $x \in [0; +\infty)$, $t \in [\varepsilon; +\infty)$, при любом $\varepsilon > 0$, т. е.

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, t) dx \right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x, t) dt \right) dx = \int_0^{+\infty} G(x, \varepsilon) dx$$

при любом $\varepsilon > 0$ и для $G(x, \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x, t) dt$, $x \in [0; +\infty)$, $\varepsilon \in [0; 1]$.

Неравенство $0 < G(x, \varepsilon) < \int_0^{+\infty} f(x, t) dt = \Phi(x)$, $\varepsilon \geq 0$, показывает, что в силу признака Вейерштрасса $\int_0^{+\infty} G(x, \varepsilon) dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$, следовательно,

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, t) dx \right) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, t) dx \right) dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} G(x, \varepsilon) dx = \int_0^{+\infty} G(x, 0) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, t) dt \right) dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Пример 52. Вычислить интеграл Френеля

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx \equiv \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx,$$

пользуясь формулой $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$, $x > 0$.

Решение. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ сходится в силу признака

Абеля—Дирихле, интеграл $\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ сходится в силу нера-

вещства $\left| \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ и теоремы сравнения, следовательно, интеграл Френеля сходится. Запишем его в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos xc^{-xt^2} dt \right) dx.$$

Интеграл $\int_0^{+\infty} \cos xc^{-xt^2} dt$ расходится при $x = 0$, следовательно, сходится неравномерно на $(0; a]$ при любом $a > 0$; интеграл $\int_0^{+\infty} \cos xc^{-xt^2} dx$ расходится при $t = 0$, следовательно, сходится неравномерно на $(0; c]$ при любом $c > 0$. Таким образом, теорема о перестановке двух несобственных интегралов непосредственно к интегралу $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos xc^{-xt^2} dt \right) dx$ неприменима. Поскольку именно нулевые значения x и t дали расходящиеся интегралы, рассмотрим интеграл

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\int_{\delta}^{+\infty} \cos xe^{-xt^2} dt \right) dx$$

для $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Покажем, что для такого интеграла условия теоремы о перестановке двух несобственных интегралов выполнены.

Функция $f(x, t) = \cos xe^{-xt^2}$ непрерывна на $[\varepsilon; +\infty) \times [\delta; +\infty)$. Если $t \in [\delta; c]$, то $|f(x, t)| \leq e^{-x\delta^2}$, и из сходимости интеграла $\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-x\delta^2} dx$ и признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла $F(\varepsilon, t) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x, t) dx$ на $[\delta; c]$.

Если $x \in [\varepsilon; a]$, то $|f(x, t)| \leq e^{-\varepsilon t^2}$, и из сходимости интегра-

ла $\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\varepsilon t^2} dt$ и признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла $\Phi(x, \delta) = \int_{\delta}^{+\infty} f(x, t) dt$ на $[\varepsilon; a]$. Так как $|f(x, t)| < e^{-xt^2}$ для $x \in [\varepsilon; +\infty)$, $t \in [\delta; +\infty)$, то

$$0 \leq \psi(t) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} |f(x, t)| dx \leq \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-xt^2} dx = \frac{e^{-\varepsilon t^2}}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

и в силу теоремы сравнения интеграл

$$\int_{\delta}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} |f(x, t)| dx \right) dt = \int_{\delta}^{+\infty} \psi(t) dt$$

сходится. Итак, $\int_{\varepsilon}^{+\infty} \Phi(x, \delta) dx = \int_{\delta}^{+\infty} F(\varepsilon, t) dt$ для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.

$$\text{Функция } F(\varepsilon, t) = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \cos x e^{-xt^2} dx = e^{-xt^2} \frac{t^2 \cos \varepsilon - \sin \varepsilon}{1 + t^4}$$

для $\varepsilon > 0$ и $t \in [0; +\infty)$. Если положить $F(0, t) = \frac{t^2}{1 + t^4}$, $t \in [0; +\infty)$, то получим функцию $F(\varepsilon, t)$, непрерывную на $[0; 1] \times [0; +\infty)$. Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} F(\varepsilon, t) dt = \int_{\delta}^{+\infty} F(0, t) dt, \quad \delta > 0.$$

Для этого достаточно установить равномерную сходимость

интеграла $\int_{\delta}^{+\infty} F(\varepsilon, t) dt$ на $[0; 1]$, что следует из неравенства

$$|F(\varepsilon, t)| \leq \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}, \quad \varepsilon \in [0; 1], \quad t \in [\delta; +\infty), \quad \text{и сходимости инте-}$$

графа $\int_{\delta}^{+\infty} \frac{t^2 + 1}{t^4 + 1} dt$. Из всего вышесказанного следует, что

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt &= \int_{\delta}^{+\infty} F(0, t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} F(\varepsilon, t) dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \Phi(x, \delta) dx = \int_0^{+\infty} \Phi(x, \delta) dx. \end{aligned}$$

Если $x > 0$, то $\Phi(x, 0) = \int_0^{+\infty} \cos x e^{-xt^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, т. е.

подынтегральная функция в интеграле $\int_0^{+\infty} \Phi(x, 0) dx$ имеет на $\langle 0; +\infty \rangle$ две особые точки. Поэтому отдельно докажем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^1 \Phi(x, \delta) dx = \int_0^1 \Phi(x, 0) dx$$

и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_1^{+\infty} \Phi(x, \delta) dx = \int_1^{+\infty} \Phi(x, 0) dx.$$

Так как функция e^{-xt^2} , $x \geq 0$, $t \geq 0$, неотрицательна, то для $\delta \geq 0$ справедливо неравенство

$$|\Phi(x, \delta)| \leq \int_{\delta}^{+\infty} e^{-xt^2} dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi x}},$$

откуда в силу признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла $\int_0^1 \Phi(x, \delta) dx$ на $[0; 1]$. Так как функ-

ция $\Phi(x, \delta) = \int_{\delta}^{+\infty} \cos x e^{-xt^2} dt$ непрерывна на $(0; 1] \times [0; 1]$, то, следовательно, $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^1 \Phi(x, \delta) dx = \int_0^1 \Phi(x, 0) dx$.

Интеграл $\int_1^{+\infty} \Phi(x, \delta) dx$ запишем в виде $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \varphi(x, \delta) dx$, где $\varphi(x, \delta) = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-xt^2} dt$. Соотношение

$$0 \leq \varphi(x, \delta) = \int_{\delta\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-z^2} dz \leq \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz$$

показывает, что функция $\varphi(x, \delta)$ ограничена на $[1; +\infty) \times [0; 1]$ и монотонна на $[1; +\infty)$ при любом $\delta \in [0; 1]$. Функция $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ не зависит от δ , поэтому интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$. Отсюда следует, что в силу признака Абеля—Дирихле интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \varphi(x, \delta) dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$. Так как функция $\Phi(x, \delta)$ непрерывна на $[1; +\infty) \times [0; 1]$, то $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_1^{+\infty} \Phi(x, \delta) dx = \int_1^{+\infty} \Phi(x, 0) dx$.

Объединяя все вышесказанное, получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos x e^{-xt^2} dt \right) dx &= \int_0^{+\infty} \Phi(x, 0) dx = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \Phi(x, \delta) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \cos x e^{-xt^2} dt \right) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Теорема о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Пусть семейство функций $f(x, t)$, $x \in [a; \omega)$, $t \in [c; d]$, удовлетворяет условиям:

- 1) функции $f(x, t)$ и $f'_t(x, t)$ непрерывны на $[a; \omega) \times [c; d]$;
- 2) интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится хотя бы при одном значении $t \in [c; d]$;
- 3) интеграл $\int_a^\omega f'_t(x, t) dx$ сходится равномерно на $[c; d]$.

Тогда интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится равномерно на $[c; d]$ к непрерывно дифференцируемой на $[c; d]$ функции $J(t)$ и $J'(t) = \int_a^\omega f'_t(x, t) dx$.

В силу локальности существования и величины производной получаем

Следствие. Пусть семейство функций $f(x, t)$, $x \in [a; \omega)$, $t \in [c; d]$, удовлетворяет условиям:

- 1) функции $f(x, t)$ и $f'_t(x, t)$ непрерывны на $[a; \omega) \times [c; d]$;
- 2) интеграл $\int_a^\omega f(x, t) dx$ сходится равномерно на $[c; d_1]$ для любого d_1 , $c < d_1 < d$;
- 3) интеграл $\int_a^\omega f'_t(x, t) dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[\gamma; \delta] \subset (c; d)$.

Тогда функция $J(t) = \int_a^{\omega} f(x, t) dx$ непрерывна на $[c; d)$, дифференцируема на $(c; d)$ и $J'(t) = \int_a^{\omega} f'_t(x, t) dx$ для всех $t \in (c; d)$.

Это следствие позволяет применить дифференцирование по параметру для вычисления таких интегралов $\int_a^{\omega} f(x, t) dx$, для которых функция $J(t)$ не является непрерывно дифференцируемой на соответствующих отрезках изменения параметра, и, тем самым, семейство $f(x, t)$ заведомо не удовлетворяет условиям теоремы о дифференцировании по параметру.

Пример 53. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos tx \, dx, a > 0, t \in \mathbb{R}$.

Решение. Функции

$$f(x, t) = e^{-ax^2} \cos tx \quad \text{и} \quad f'_t(x, t) = -xe^{-ax^2} \sin tx$$

непрерывны на $[0; +\infty) \times \mathbb{R}$. Если $t = 0$, то интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos tx \, dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} \, dz$$

есть интеграл Эйлера—Пуассона, вычисленный в примере 51. Таким образом, выполнено второе условие теоремы о дифференцировании по параметру и $J(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Интеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-az} \, dz$ сходится, поэтому не-

равенство $|f'_t(x, t)| \leq xe^{-ax^2}, t \in \mathbb{R}$, показывает, что в силу признака Вейерштрасса интеграл

$$\int_0^{+\infty} f'_t(x, t) \, dx = - \int_0^{+\infty} xe^{-ax^2} \sin tx \, dx$$

сходится равномерно на любом отрезке $[c; d] \subset \mathbb{R}$. Итак, все условия теоремы о дифференцировании по параметру выполнены, следовательно, функция $J(t) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos tx \, dx, a > 0$,

непрерывно дифференцируема на любом отрезке $[c; d] \subset \mathbb{R}$, т. е. $J(t) \in C^1(\mathbb{R})$ и для любого $t \in \mathbb{R}$

$$J'(t) = - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin tx \, dx.$$

Первообразная функции $x e^{-ax^2} \sin tx$ относительно x , если ни a , ни t не равны нулю, не выражается в элементарных функциях, но из равенства

$$\begin{aligned} - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin tx \, dx &= \frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin tx \Big|_0^{+\infty} - \\ &- \frac{t}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos tx \, dx = - \frac{t}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos tx \, dx \end{aligned}$$

следует, что функция $J(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $J'(t) = -\frac{t}{2a} J(t)$. Из этого уравнения и начального условия $J(0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ получаем, что $J(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$.

Если аналитическое выражение функции $f(x, t)$ или $f'_t(x, t)$ не определено при некоторых значениях $x \in [a; \omega)$, но эти функции могут быть доопределены так, чтобы получились функции, непрерывные на $[a; \omega) \times [c; d]$ (или $[a; \omega) \times [c; d)$), то такое доопределение всегда подразумевается. При вычислении конкретного интеграла в таком случае проверка возможности доопределения функции “по непрерывности” — обязательная часть решения.

Пример 54. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$, $0 < a < b$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, t) = \frac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Ее аналитическое выражение не имеет смысла при $x = 0$. Следовательно, необходимо проверить возможность определения значений $f(0, t)$ так, чтобы функция $f(x, t)$ стала непрерывной на $[0; +\infty) \times \mathbb{R}$. Соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2} = b - t$$

показывает, что, положив $f(0, t) = b - t$, получим функцию, непрерывную на $[0; +\infty) \times \mathbb{R}$. Итак, возможность доопределения “по непрерывности” функции $f(x, t)$ на $[0; +\infty) \times \mathbb{R}$ проверена. Далее, непрерывность функции $f'_t(x, t) = e^{-tx^2}$ следует из ее аналитического выражения. Так как $a > 0$,

то интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ сходится. Отсюда и из неравенства

$0 < e^{-tx^2} < e^{-ax^2}$, $t \in [a; b]$, в силу признака Вейерштрасса следует равномерная сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx =$

$$= - \int_0^{+\infty} f'_t(x, t) dx \text{ на } [a; b]. \text{ Наконец, } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx = 0$$

при $t = b$. Итак, все условия теоремы о дифференцировании по параметру выполнены для семейства $f(x, t)$, $x \in [0; +\infty)$,

$t \in [a; b]$, где функция $f(x, t) = \frac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2}$, $x \neq 0$, и доопределена “по непрерывности” на множестве $[0; +\infty) \times [a; b]$. Сле-

довательно, функция $J(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$ непрерывно

дифференцируема на $[a; b]$ и удовлетворяет равенствам:

$$J(b) = 0$$

$$J'(t) = - \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx = - \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}}$$

§ 3. Несобственный интеграл, зависящий от параметра 91

(см. пример 51). Отсюда получаем, что $J(t) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi t}$.
Окончательно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx = J(a) = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \quad (0 < a < b).$$

Пример 55. Вычислить интеграл Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$.

Решение. Функции $f(x, t) = \frac{\cos tx}{1+x^2}$ и $f'_t(x, t) = \frac{-x \sin tx}{1+x^2}$ непрерывны на $[0; +\infty) \times \mathbb{R}$. Неравенство $\left| \frac{\cos tx}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ и

сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ показывают, что в силу признака

Вейерштрасса интеграл $\int_0^{+\infty} f(x, t) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx$

сходится равномерно на $\mathbb{R}$. При любом $\varepsilon > 0$ функция $F(b, t) =$

$\int_0^b \sin tx dx = \frac{\sin bt}{t}$ ограничена на $[0; +\infty) \times [\varepsilon, +\infty)$; функ-

ция $g(x, t) = \frac{x}{1+x^2}$ не зависит от t , монотонна на $[1; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x, t) = 0$. Следовательно, в силу признака Абеля—Ди-

рихле интеграл $\int_1^{+\infty} \sin tx \cdot \frac{x}{1+x^2} dx$ сходится равномерно на

$[\varepsilon; +\infty)$ при любом $\varepsilon > 0$. Применяя критерий Коши, ви-

дим, что равномерная сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin tx dx$

на $[\varepsilon; +\infty)$ эквивалентна равномерной сходимости интеграла

$\int_0^{+\infty} \frac{-x}{1+x^2} \sin tx dx$ на $[\varepsilon; +\infty)$. Итак, семейство $f(x, t) = \frac{\cos tx}{1+x^2}$,

$x \in [0; +\infty)$, $t \in [0; +\infty)$, удовлетворяет всем условиям след-

ствия теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру, следовательно, функция

$$J(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx$$

непрерывна на $[0; +\infty)$, дифференцируема на $(0; +\infty)$ и

$$J'(t) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin tx}{1+x^2} dx$$

для $t > 0$.

При любом $t \in \mathbb{R}$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{x \sin tx}{1+x^2} \right)'_t dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos tx}{1+x^2} dx$$

расходится, поэтому семейство $g(x, t) = \frac{x \sin tx}{1+x^2}$ не удовлетворяет условиям теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Используем равенство

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx, \quad t > 0$$

(см. пример 49). Складывая его с равенством

$$J'(t) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin tx}{1+x^2} dx,$$

получаем, что $J'(t) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x(1+x^2)} dx$ для $t > 0$. Ана-

литическое выражение $\frac{\sin tx}{x(1+x^2)}$ не имеет смысла при $x = 0$,

но соотношение $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin tx}{x(1+x^2)} = t$ показывает, что функция

$\varphi(x, t) = \frac{\sin tx}{x(1+x^2)}$ доопределяется "по непрерывности" на

$[0; +\infty) \times [0; +\infty)$ равенством $\varphi(0, t) = t$. Функция $\varphi'_t(x, t) = \frac{\cos tx}{1+x^2}$ непрерывна на $[0; +\infty) \times [0; +\infty)$, интеграл

$$\int_0^{+\infty} \varphi(x, t) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x(1+x^2)} dx$$

сходится при $t = 0$, неравенство $\left| \frac{\cos tx}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$ и схо-

димость интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ показывают, что в силу при-

знака Вейерштрасса интеграл $\int_0^{+\infty} \varphi'_t(x, t) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx$

сходится равномерно на $[0; +\infty)$. Итак, семейство $\varphi(x, t)$, $x \in [0; +\infty)$, $t \in [0; +\infty)$, удовлетворяет всем условиям теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру, следовательно,

$$J''(t) = \left(J'(t) + \frac{\pi}{2} \right)' = \int_0^{+\infty} \varphi'_t(x, t) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tx}{1+x^2} dx = J(t)$$

для $t > 0$.

Итак, функция $J(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $J(t)$ — четная непрерывная функция на $\mathbb{R}$;

2) $J''(t) = J(t)$ для $t > 0$;

3) $J(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$;

4) $|J(t)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Из дифференциального уравнения $J''(t) = J(t)$ (условие 2) следует, что $J(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ для $t > 0$. Из ограниченности $J(t)$ на $\mathbb{R}$ (условие 4) следует, что $C_1 = 0$. Из непрерывности $J(t)$ на $\mathbb{R}$ и равенства $J(0) = \frac{\pi}{2}$ (условия 1 и 3)

следует, что $C_2 = \frac{\pi}{2}$. Из четности $J(t)$ (условие 1) следует, что $J(t) = \frac{\pi}{2}e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$. Следовательно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = J(a) = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что функция

$$J'(t) = -\frac{\pi}{2}e^{-|t|} \operatorname{sign} t = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin tx}{1+x^2} dx$$

дифференцируема при всех $t > 0$, хотя интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos tx}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x \sin tx}{1+x^2} \right)'_t dx$$

расходится. Этот факт показывает, что теорема о дифференцировании несобственного интеграла по параметру дает только достаточное, но не необходимое условие дифференцируемости функции.

Внимание! При вычислении несобственного интеграла с помощью дифференцирования или интегрирования по параметру проверка выполнения достаточных условий соответствующих равенств является существенной частью решения. Отсутствие или неполнота такой проверки — грубая ошибка. Формальное вычисление в таком случае не представляет решения.

§4. Упражнения

Несобственные интегралы, независящие от параметра

В следующих примерах непосредственно установить сходимость интеграла, и в этом случае найти его величину, или установить расходимость.

$$1) \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \alpha > 1.$$

$$2) \int_0^{10} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

$$3) \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}.$$

$$4) \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$$

$$5) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)(2x-1)}.$$

$$6) \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx.$$

$$7) \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$8) \int_3^{\infty} \frac{2x dx}{(x^2-1)^2}.$$

$$9) \int_{-3}^3 \frac{2x dx}{(x^2-1)^2}.$$

$$10) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{a^2+b^2x^2}, \quad a \neq 0, b \neq 0.$$

$$11) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2+4x+3}.$$

$$12) \int_{-5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+3}.$$

$$13) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-4x+11}.$$

$$14) \int_2^{+\infty} \frac{3x-1}{x^2+5x-7} dx.$$

$$15) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

$$16) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad ab \neq 0.$$

$$17) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

$$18) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$$

$$19) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad a^2+b^2 \neq 0.$$

$$20) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}, \quad ab \neq 0.$$

$$21) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

$$22) \int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}} dx.$$

$$23) \int_0^{25} \frac{dx}{\sqrt{x}+x}.$$

$$24) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$25) \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}.$$

$$26) \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3}}.$$

$$27) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$28) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}, \quad a > 1.$$

$$29) \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \quad a < b.$$

$$30) \int_a^b x \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \quad a < b.$$

$$31) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < b. \quad 32) \int_a^b \frac{x dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a < b.$$

$$33) \int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$34) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x + \alpha^2} \sqrt{1-2\beta x + \beta^2}},$$

$$0 < \alpha\beta < 1, |\alpha| < 1, |\beta| < 1.$$

$$35) \int_{-2}^{+\infty} e^{1-2x} dx.$$

$$36) \int_0^{+\infty} x^2 \cdot 5^{-x} dx.$$

$$37) \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx.$$

$$38) \int_{-1}^1 e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^3}.$$

$$39) \int_0^{+\infty} \sin 2x dx.$$

$$40) \int_0^{+\infty} \cos \alpha x dx.$$

$$41) \int_1^{+\infty} \ln x dx.$$

$$42) \int_0^1 \ln x dx.$$

$$43) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x}.$$

$$44) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$45) \int_0^1 \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$46) \int_0^1 \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$47) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$48) \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx.$$

$$49) \int_{-1}^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$50) \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$51) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt[3]{\arcsin x}}.$$

$$52) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$53) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt[7]{\cos^5 x}} dx.$$

$$54) \int_0^{\pi} \operatorname{tg} x dx.$$

$$55) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1-a^2x^2)}.$$

$$56) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}(a^2x^2-1)}.$$

$$57) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}}.$$

$$58) \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^4-1}}.$$

$$59) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^3} dx.$$

$$60) \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} dx.$$

$$61) \int_0^1 x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$62) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x dx.$$

$$63) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx.$$

$$64) \int_0^{+\infty} x e^{-x} \sin x dx.$$

$$65) \int_0^2 \left(2x \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2} \right) dx.$$

$$66) \int_1^{+\infty} x e^{-x^3} (2x^4 - 1) dx.$$

Исследовать сходимость интеграла от неотрицательной функции.

$$67) \int_0^{+\infty} \frac{x^{5/2}}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$68) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

$$69) \int_0^2 \frac{x^{\alpha-1}}{|1-x|} dx.$$

$$70) \int_0^2 \frac{x}{|1-x|^\alpha} dx.$$

- 71) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^3 - 1)^p}.$ 72) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 + x}{x^4 + x^2 + 1} dx.$
- 73) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^4 + 18x + 100} dx.$ 74) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + 2}.$
- 75) $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx.$ 76) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha (x+2)}{x+1} dx.$
- 77) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+2x^2}}.$ 78) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}.$
- 79) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x^2)^2}}.$ 80) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}.$
- 81) $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-\alpha)(x-\beta)}}, \quad \alpha > \beta > 5.$
- 82) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{|x-3|}}.$ 83) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}.$
- 84) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad k^2 < 1.$
- 85) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} dx.$ 86) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2} dx.$
- 87) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx.$ 88) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$
- 89) $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$

- 90) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$
- 91) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x^\alpha} dx.$
- 92) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{e^{3x} - 1}}.$
- 93) $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-(x^2 + \frac{1}{x^2})} dx, \quad n > 0.$
- 94) $\int_0^{+\infty} x^x e^{-x^n} dx.$
- 95) $\int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{x^2} dx.$
- 96) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^x}.$
- 97) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{|k - \sin \varphi|}, \quad 0 < k < 1.$
- 98) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}.$
- 99) $\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos b}}, \quad 0 < b < 2\pi.$
- 100) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \right)^p d\theta, \quad p > 0.$
- 101) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1 + x^2} dx.$
- 102) $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^p dx.$
- 103) $\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha x \cos^\beta x dx, \quad \alpha > -1, \beta > -1.$
- 104) $\int_0^\pi \sin \left(\frac{1}{\cos x} \right) \frac{dx}{\sqrt{x}}.$
- 105) $\int_0^\pi \frac{1 - \cos x}{x^\alpha} dx.$
- 106) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^p} dx, \quad p > 0.$
- 107) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$

- 108) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{\sqrt{x^5 + 2x^3}} dx.$ 109) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} dx.$
- 110) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x - \operatorname{arctg} \beta x}{x} dx.$ 111) $\int_0^{+\infty} \frac{x^n \operatorname{arctg} x}{\sqrt{4 + x^n}} dx, \quad n \geq 0.$
- 112) $\int_0^{1/8} \frac{\arcsin(x^2 + x^5)}{x \ln^2(1 + x)} dx.$ 113) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{|\pi^2 - x^2|} dx.$
- 114) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left| \frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right| dx.$ 115) $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}.$
- 116) $\int_0^\pi \frac{1 + \cos x}{(\pi - x)^p} dx.$ 117) $\int_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}.$
- 118) $\int_0^1 \left| \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{\ln x} \right| dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$
- 119) $\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} |\ln x| dx.$ 120) $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$
- 121) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$ 122) $\int_0^1 \frac{|\ln x|}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx.$
- 123) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x |\ln x|^\alpha}.$ 124) $\int_{100}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x |\ln \ln x|^\alpha}.$
- 125) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + |\ln x|^\alpha}.$ 126) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{1,1}} dx.$
- 127) $\int_0^2 \frac{1}{|\ln x|^p} dx.$ 128) $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$

- 129) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{x^4+3x^5}} dx.$ 130) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} dx.$
- 131) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$ 132) $\int_1^{+\infty} \frac{|\ln \cos \frac{1}{x}|}{x^p} dx.$
- 133) $\int_0^\pi |\ln \sin x| dx.$ 134) $\int_1^{+\infty} \left| \ln \cos \frac{1}{x} \right| \operatorname{ctg} \frac{1}{x} dx.$
- 135) $\int_0^{\pi/2} \frac{|\ln \sin x|}{\sqrt{x(\pi-2x)^5}} dx.$ 136) $\int_0^\pi \frac{|\ln \sin x|}{x} dx.$
- 137) $\int_0^\pi \frac{|\ln x|}{\sqrt{\sin x}} dx.$ 138) $\int_0^{+\infty} \frac{|\ln x|}{1+x^2} dx.$
- 139) $\int_0^{\pi/2} |\ln |\sin^2 \varphi - k^2|| d\varphi, \quad |k| < 1.$
- 140) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^\alpha)}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} dx.$ 141) $\int_0^{1/3} \frac{\ln^\alpha \frac{1}{x}}{\operatorname{tg}^\beta x} dx.$
- 142) $\int_1^{+\infty} x^k \cdot \frac{x + \sin x}{x - \sin x} dx.$ 143) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}.$
- 144) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\ln(1+x)}}{1 - \cos x}.$ 145) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\sin x} dx.$
- 146) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x} dx.$ 147) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) dx.$
- 148) $\int_1^{+\infty} \ln \left(1 + \sin \frac{1}{x} \right) dx.$ 149) $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{x} \right) dx.$

$$150) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$151) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}{x \ln^2 x} dx.$$

$$152) \int_0^{+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[4]{x^4 + 4x^3} \right) dx.$$

$$153) \int_0^{+\infty} (\ln(x^2 + 1) - 2 \ln x) dx.$$

$$154) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(e^x - x)}{x^\alpha} dx.$$

$$155) \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} - e^{-\frac{\beta^2}{x^2}} \right) dx.$$

$$156) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^\alpha + 1} - \sqrt[3]{|x^\alpha - 1|}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$157) \int_0^{+\infty} e^{-x^6 \sin^2 x} dx.$$

$$158) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^n \sin^2 x}.$$

$$159) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}.$$

$$160) \int_0^{+\infty} \sin^2 \left(\pi \left(x + \frac{1}{x} \right) \right) dx.$$

$$161) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x dx.$$

$$162) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left(\frac{3x+1}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} dx.$$

$$163) \int_1^{+\infty} \frac{x^2 + x + 1}{(e^{x^2} + 3)^{\frac{1}{x}}} dx.$$

$$164) \int_1^{+\infty} \frac{(2^x + 3^x)^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{x^2} \sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

$$165) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}.$$

$$166) \int_1^{+\infty} \frac{x^{100} + 1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x\sqrt{x}}} dx.$$

Исследовать сходимость (абсолютную и условную) интеграла.

- 167) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{k^2 + x^2} dx.$ 168) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx, \quad a > 0.$
- 169) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx.$ 170) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx.$
- 171) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^\alpha} dx, \quad \alpha \geq 0.$ 172) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^3+3x}} dx.$
- 173) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x^2+x}} dx.$ 174) $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^a} \sin x dx.$
- 175) $\int_\pi^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx.$ 176) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x dx}{1+x^q}, \quad q \geq 0.$
- 177) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+10} dx.$
- 178) $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$, где $P_m(x)$ и $P_n(x)$ — целые многочлены и $P_n(x) > 0$ при $x \geq 0$.
- 179) $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \cos x}{1+x^q} dx, \quad q \geq 0.$ 180) $\int_{100}^{+\infty} (\ln x)^\lambda \frac{\sin x}{x} dx.$
- 181) $\int_1^{+\infty} e^{\sin x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} dx.$ 182) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \operatorname{arctg} x dx.$
- 183) $\int_0^{+\infty} e^{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{\sin 3x}{x^\alpha} dx.$ 184) $\int_0^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x(e^x+1)} dx.$

$$185) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx.$$

$$186) \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{(1-x^2)^p} dx.$$

$$187) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$

$$188) \int_0^{+\infty} \cos(x^3) dx.$$

$$189) \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{x} dx.$$

$$190) \int_0^1 \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{x(1-x)^p} dx.$$

$$191) \int_0^{\pi/2} \sin(\sec x) dx.$$

$$192) \int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx.$$

$$193) \int_0^{+\infty} (e^x + x) \sin e^{2x} dx.$$

$$194) \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \sin e^x dx.$$

$$195) \int_0^{+\infty} \cos(x + x^3) dx.$$

$$196) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x + x^2)}{\alpha^2 + x} dx.$$

$$197) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + x^2)}{x^p} dx.$$

$$198) \int_2^{+\infty} \frac{\cos(x + x^2)}{x^p} dx.$$

$$199) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x + \frac{1}{x})}{x^p} dx.$$

$$200) \int_0^{+\infty} x \cos(x^3 - x) dx.$$

$$201) \int_0^{+\infty} \sin |\ln x|^q \cdot \frac{dx}{x}, \quad q > 0.$$

$$202) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^{x^2 + \sin x}} dx.$$

$$203) \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^x dx.$$

$$204) \int_1^{+\infty} e^{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x + \sin x} dx.$$

$$205) \int_0^{+\infty} \sin(x^2 + \sin x) dx.$$

$$206) \int_0^{+\infty} \cos(x^3 + \sin 2x) dx.$$

$$207) \int_0^{+\infty} e^{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} dx.$$

При помощи сравнения с рядами исследовать сходимость следующих интегралов.

$$208) \int_0^{+\infty} f(x) dx, \quad f(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad x \in [n-1; n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$209) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx. \qquad 210) \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x^\alpha} dx.$$

$$211) \int_0^1 \frac{(-1)^{[\frac{1}{x}]}}{x} dx. \qquad 212) \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin x} (\sin(\sin x))}{x} dx.$$

$$213) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{1 + x^\beta |\sin x|}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$214) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{1 + x^\beta \sin^2 x}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$215) \int_0^{+\infty} \frac{\sin[\frac{x}{2}]}{1 + \ln^2(x+1)} dx. \qquad 216) \int_0^{+\infty} \frac{\cos[\frac{x}{2}]^2}{1 + \ln^2(x+1)} dx.$$

Установить, собственным или несобственным является интеграл, и, если он несобственный, то исследовать его сходимость.

$$217) \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right) dx. \qquad 218) \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{arccotg} x \right) dx.$$

$$219) \int_0^a \frac{\ln(2 - \frac{x}{a})}{\sin(x-a)} \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{\pi x}{a}} dx, \quad a \neq 0.$$

- 220) $\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{x-5}{x+5} dx.$ 221) $\int_0^1 \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x \sin^{\alpha} x} dx.$
- 222) $\int_0^{1/3} \frac{\ln(1+x+x^2) + \ln(1-x+x^2)}{x^{3/2}(e^x - 1)} dx.$
- 223) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 - 2}{(x^2 + 1)^2} \left(3^{\frac{x}{2x^2+1}} - 1 \right) dx.$
- 224) $\int_0^1 x \ln \ln \frac{1}{x} dx.$ 225) $\int_0^2 \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} dx.$
- 226) $\int_0^2 \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - e^{-\sqrt[3]{x}} - 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sin \sqrt{x}} dx.$ 227) $\int_0^2 \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} - \sin \sqrt[3]{x}} dx.$
- 228) $\int_0^2 \frac{e^{\sqrt[3]{x}} - e^{-\sqrt[3]{x}} - 2\sqrt[3]{x}}{x^{2/3} - \sin x^{2/3}} dx.$
- 229) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} \pi x - (1 - 6x^2 + 4x^3) \sin \pi x}{x^4 \ln^4 x} dx.$
- 230) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} \pi x - (1 - 6x^2 + 4x^3) \sin \pi x}{x^4 \ln^3 x} dx.$
- 231) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} \pi x - (1 - 6x^2 + 4x^3) \sin \pi x}{x^3 \ln^3 x} dx.$
- 232) $\int_0^5 \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^{11} + 11x^{19}}} dx.$
- 233) $\int_0^5 \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^{13} + 11x^{19}}} dx.$

$$234) \int_0^5 \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{x^{10} + 11x^{19}}} dx.$$

$$235) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sin x) - x \sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt{x^{11} + 11x^{19}}} dx.$$

$$236) \int_0^2 \frac{\sqrt[4]{x^2 - x + 1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2} - e) \ln^{7/3} x} dx.$$

$$237) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 - x + 1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2} - e) \ln^{7/3} x} dx.$$

$$238) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 - x + 1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2} - e) \ln^{10/3} x} dx.$$

$$239) \int_0^2 \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}}{(e^{x^2} - e) \ln^2 x} dx.$$

$$240) \int_0^1 \frac{(\ln(1 + 3x + 3x^2))^2 + 3(x-1)^2 - 3)\sqrt{x^3 + 4}}{\sqrt[3]{x^{13} + x^{15}}} dx.$$

$$241) \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1 + 3x + 3x^2))^2 + 3(x-1)^2 - 3)\sqrt{x^3 + 4}}{\sqrt[3]{x^{13} + x^{15}}} dx.$$

$$242) \int_0^{10} \frac{(\ln(1 + 3x + 3x^2))^2 + 3(x-1)^2 - 3)\sqrt{x^3 + 4}}{\sqrt[3]{x^{12} + x^{13}}} dx.$$

$$243) \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1 + 3x + 3x^2))^2 + 3(x-1)^2 - 3)\sqrt{x^3 + 4}}{\sqrt[3]{x^{12} + x^{13}}} dx.$$

$$244) \int_0^1 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+5} - e^x}{\ln(1+x^2)} dx. \quad 245) \int_0^1 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+5} - e^x}{\ln^{3/2}(1+x^2)} dx.$$

$$246) \int_0^1 \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}+5} - e^x}{\ln^{4/3}(1+x^2)} dx.$$

Доказать справедливость неравенств.

$$247) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx > 0. \quad 248) \left| \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx \right| < \frac{\pi}{2}.$$

$$249) 0 < \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx < \frac{1}{\pi}. \quad 250) 0 < \int_{100\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx < \frac{1}{100\pi}.$$

$$251) 0 < \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{x\sqrt{x}} dx < 2\pi + 2\sqrt{2} - 2.$$

$$252) 0 < \int_{100\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{50\pi}. \quad 253) \int_0^1 \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - x)}{\sqrt{1-x^2}} dx > 0.$$

$$254) 0 < \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{2x^4 + x + 2} < \frac{1}{5}. \quad 255) \frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} < \frac{3}{5}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$256) \frac{1}{19} < \int_1^{+\infty} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} dx < \frac{1}{19} + \frac{1}{39}.$$

$$257) \frac{20}{19} < \int_0^{+\infty} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} < \frac{20}{19} + \frac{1}{20}.$$

$$258) 1 - \frac{1}{n} < \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx < 1 + \frac{1}{n}, \quad n > 1.$$

$$259) 0 < \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx < \frac{1}{n}. \quad 260) 0 < \int_2^{+\infty} e^{-x^2} dx < \frac{1}{4e^4}.$$

$$261) \int_{1,9}^2 \frac{e^{-x} dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}} < 0,03. \quad 262) 0 < \int_3^{+\infty} e^{-x^2} dx < \left(\frac{1}{2}\right)^{11}.$$

$$263) \left| \int_2^{+\infty} e^{-x^4} \cos x^4 dx \right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{21}.$$

$$264) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} > \frac{1}{100}.$$

$$265) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\alpha} \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(n+1)^{\beta} \pi^{\beta}}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha} dx}{1+x^{\beta} \sin^2 x} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{\alpha} \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+n^{\beta} \pi^{\beta}}},$$

$$\beta > 2(\alpha+1).$$

$$266) 0 \leq \int_{100}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x} dx < 0,01. \quad 267) \int_{100}^{+\infty} \sin \pi x^2 dx < 0,01.$$

Вычислить.

$$268) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(\alpha^2 - x^2) \sqrt{1-x^2}}, \quad \alpha > 1.$$

$$269) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - \alpha^2) \sqrt{x^2 - 1}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

$$270) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2) \sqrt{1-x^2}}, \quad \alpha > 0.$$

$$271) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2) \sqrt{x^2 - 1}}, \quad \alpha > 0.$$

$$272) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2) \sqrt{x^2 + 1}}, \quad \alpha > 0.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получить рекуррентную формулу для интеграла I_n , $n \in \mathbb{N}$, и найти его значение.

$$273) I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx. \quad 274) I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx.$$

$$275) I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin^n x dx, \quad \alpha > 0.$$

$$276) I_n(m) = \int_0^1 x^n \ln^m x dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$277) I_n(m) = \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{m-1} dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$278) I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \sin x dx. \quad 279) I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} \cos x dx.$$

$$280) I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx.$$

$$281) I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(Ax^2 + 2Bx + C)^n}, \quad AC - B^2 > 0.$$

$$282) I_n = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx.$$

$$283) I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx, \quad \alpha > 0.$$

$$284) I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx, \quad \alpha > 0.$$

$$285) I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 286) I_n = \int_0^1 (\ln x)^n dx.$$

$$287) I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 288) I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$$

$$289) I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x)\dots(n+x)}.$$

290) Доказать, что существует $M > 0$, такое, что при $a > M$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x+a} &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1 \cdot 2}{a^3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{a^4} + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \cdot \theta, \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Доказать равенства.

$$291) \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx.$$

$$292) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = - \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

$$293) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx.$$

$$294) \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = - \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

$$295) \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = - \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

$$296) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

$$297) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{tg} \varphi}} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} \varphi} d\varphi = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}.$$

$$298) \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx.$$

$$299) \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-k^2)}} = 2 \int_0^{1/\sqrt{x_0}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

$$300) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^4} dx = 0. \quad 301) \int_{-1}^1 \cos x \cdot \ln \frac{1-x}{1+x} dx = 0.$$

$$302) \int_0^1 \frac{\ln x dx}{1+x} = - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

$$303) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = -2 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

Используя разложение подынтегральной функции в ряд и равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

вычислить следующие интегралы.

$$304) \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx. \quad 305) \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx.$$

$$306) \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} dx. \quad 307) \int_0^{+\infty} \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1} dx.$$

$$308) \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{e^x - 1}.$$

$$309) \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{e^x + 1}.$$

$$310) \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{e^{ax} - e^{-ax}}.$$

$$311) \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} \, dx.$$

$$312) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} \, dx.$$

$$313) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} \, dx.$$

$$314) \int_0^1 \frac{x \ln x \, dx}{1-x^2}.$$

$$315) \int_0^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{dx}{x}.$$

$$316) \int_0^{\pi/2} \ln^2 \operatorname{tg} x \, dx.$$

$$317) \int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) \, dx.$$

Вычислить.

$$318) \int_1^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{3/2}} \, dx.$$

$$319) \int_0^{\pi/2} \ln |\sin^2 \varphi - a^2| \, d\varphi, \quad a^2 \leq 1.$$

$$320) \int_0^{+\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

$$321) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \ln \left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| \, dx.$$

$$322) \int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} \varphi} \, d\varphi.$$

$$323) \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \, dx.$$

$$324) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$$

$$325) \int_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{ctg} x} \, dx.$$

- 326) $\int_0^{\varphi} \frac{\cos \frac{1}{2}x}{\sqrt{2(\cos x - \cos \varphi)}} dx.$ 327) $\int_0^{\varphi} \frac{\cos \frac{3}{2}x}{\sqrt{2(\cos x - \cos \varphi)}} dx.$
- 328) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \ln x}{1+x^{2m+2}} dx, \quad m > -1.$
- 329) $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx.$ 330) $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx.$
- 331) $\int_0^{\pi} x \ln \sin x \, dx.$ 332) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2 \sqrt{x}} dx.$
- 333) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx.$ 334) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$
- 335) $\int_0^1 \frac{(1-x^2) \ln x \, dx}{(1+x^2)^2}.$ 336) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x \, dx}{1-x^2}.$
- 337) $\int_0^1 \frac{x \ln x \, dx}{(1-x^2)^{3/2}}.$ 338) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \ln \left(x + \frac{1}{x} \right).$
- 339) $\int_0^{\pi/2} \frac{\pi - 2x}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}} dx.$ 340) $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos x}{\sin x} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$
- 341) $\int_0^{\pi} \ln \sin x \cdot \cos nx \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$
- 342) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx.$ 343) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha^2 x^2} - e^{-\beta^2 x^2}}{x^2} dx.$
- 344) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) - \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^2} dx.$

$$345) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$346) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$347) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n x}{x^{2\mu+1}} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{N}, n \geq 2\mu + 1.$$

$$348) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1} px}{x} dx, \quad p > 0. \quad 349) \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n dx.$$

350) Доказать теорему Фруллани:

а) если существует $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$ и для любого $a > 0$ имеем

$\frac{f(x)}{x} \in \tilde{R}(a, +\infty)$, то $\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx$ сходится для лю-

бых $\alpha > 0, \beta > 0$ и равен $f(0+) \ln \frac{\beta}{\alpha}$;

б) если существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ и для любого $a > 0$

имеем $\frac{f(x)}{x} \in \tilde{R}(0, a)$, то $\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx$ сходится для

любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и равен $A \cdot \ln \frac{\alpha}{\beta}$.

Используя теорему Фруллани, вычислить интегралы.

$$351) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$352) \int_0^{+\infty} \ln \frac{p + qe^{-\alpha x}}{p + qe^{-\beta x}} \cdot \frac{dx}{x}, \quad p > 0, q > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$353) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x - \operatorname{arctg} \beta x}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$354) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$355) \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) \frac{dx}{x^2}.$$

$$356) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} + x(\alpha - \beta)e^{-\beta x}}{x^2} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$357) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$358) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x - \alpha \sin x}{x^2} dx. \quad 359) \int_0^{+\infty} \frac{\alpha x \cos x - \sin \alpha x}{x^2} dx.$$

$$360) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta.$$

$$361) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} \cos \beta x dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \alpha \neq \beta.$$

$$362) \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{\ln x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$363) \int_0^{+\infty} \frac{\beta \sin \alpha x - \alpha \sin \beta x}{x^2} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$364) \int_0^{+\infty} \frac{\beta \ln(1 + \alpha x) - \alpha \ln(1 + \beta x)}{x^2} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$365) \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x} - e^{-\beta x})^2 \frac{dx}{x^2}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

366) Доказать формулу:

$$\int_0^{+\infty} \frac{A_1 \cos \alpha_1 x + A_2 \cos \alpha_2 x + \dots + A_n \cos \alpha_n x}{x} dx =$$

$$= -(A_1 \ln \alpha_1 + A_2 \ln \alpha_2 + \dots + A_n \ln \alpha_n),$$

$$\alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, n, A_1 + A_2 + \dots + A_n = 0.$$

Вычислить.

$$367) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n} \alpha x - \sin^{2n} \beta x}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$368) \int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n+1} \alpha x - \cos^{2n+1} \beta x}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$369) \int_0^{+\infty} \frac{\cos^{2n} \alpha x - \cos^{2n} \beta x}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$370) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos \beta x dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$371) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x \sin \gamma x}{x} dx,$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \alpha = \max(\alpha, \beta, \gamma).$$

$$372) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \beta x}{x} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$373) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cdot \frac{\sin \alpha_1 x}{x} \dots \frac{\sin \alpha_n x}{x} dx,$$

$$a > 0, \alpha_i > 0, i = 1, 2, \dots, n, a > \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

$$374) \int_0^{+\infty} (\sin \alpha x - \sin \beta x)^2 \frac{dx}{x^2}.$$

**Собственные интегралы,
зависящие от параметра**

Исследовать равномерную сходимость относительно множества X семейства функций $f(x, y)$ при $y \rightarrow y_0$.

$$375) f(x, y) = x^2 + y^2, \quad X = [-1; 1], \quad y \rightarrow 0.$$

$$376) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 y^2}, \quad X = (0; +\infty), \quad y \rightarrow +\infty.$$

$$377) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 y^2}, \quad X = (1; +\infty), \quad y \rightarrow 0+.$$

$$378) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 y^2}, \quad X = (1; +\infty), \quad y \rightarrow +\infty.$$

$$379) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 y^2}, \quad X = (1; A), \quad y \rightarrow 0+.$$

$$380) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad X = (1; +\infty), \quad y \rightarrow +\infty.$$

$$381) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad X = (0; +\infty), \quad y \rightarrow 0+.$$

$$382) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad X = (1; A), \quad y \rightarrow +\infty.$$

$$383) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad X = (1; +\infty), \quad y \rightarrow 0+.$$

$$384) f(x, y) = \ln(1 - y^2 \cos x), \quad X = \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \quad y \rightarrow 0.$$

$$385) f(x, y) = \ln(1 + y^2 \operatorname{tg}^2 x), \quad X = \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \quad y \rightarrow 0.$$

$$386) f(x, y) = \ln\left(1 - \frac{1}{y^2} \sin^2 x\right), \quad X = \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad y \rightarrow +\infty.$$

$$387) f(x, y) = y \ln(x^2 + y^2), \quad X = (0; 1),$$

а) $y \rightarrow 0$; б) $y \rightarrow 1$.

$$388) f(x, y) = \frac{\ln(x + y)}{\ln(x^2 + y^2)}, \quad X = (1; 2), \quad y \rightarrow +\infty.$$

$$389) f(x, y) = \frac{y \operatorname{arctg}(xy)}{y + 1}, \quad X = (0; +\infty),$$

а) $y \rightarrow 0+$; б) $y \rightarrow +\infty$.

$$390) f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg}(xy)}{y(y+1)}, \quad X = [1; +\infty),$$

а) $y \rightarrow 0+$; б) $y \rightarrow +\infty$.

$$391) f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}}, \quad X = (1; +\infty),$$

а) $y \rightarrow +\infty$; б) $y \rightarrow 0+$.

$$392) f(x, y) = \frac{xy \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \quad X = (1; +\infty),$$

а) $y \rightarrow +\infty$; б) $y \rightarrow 0+$.

$$393) f(x, y) = \frac{1}{x} (e^{xy} - 1), \quad X = (0; +\infty),$$

а) $y \rightarrow 0+$; б) $y \rightarrow 0-$; в) $y \rightarrow -\infty$; г) $y \rightarrow -1$; д) $y \rightarrow 1$.

$$394) f(x, y) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2y}, \quad X = (0; 1), \quad \text{а) } y \rightarrow 1+; \quad \text{б) } y \rightarrow 2.$$

$$395) f(x, y) = (x-1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{y}, \quad X = (0; 1),$$

а) $y \rightarrow 2+$; б) $y \rightarrow 3$.

Проверить, выполняется или нет равенство

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$$

для следующей функции $f(x, y)$.

$$396) f(x, y) = x^2 \sqrt{x^2 + y^2}, \quad [a; b] = [0; 1], \quad y_0 = 0.$$

$$397) f(x, y) = \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}, \quad [a; b] = [0; 1], \quad y_0 = 0.$$

$$398) f(x, y) = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad [a; b] = [0; 1], \quad y_0 = 0.$$

$$399) f(x, y) = \frac{x^3}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}}, \quad [a; b] = [0; 1], \quad y_0 = 0.$$

$$400) f(x, y) = \frac{e^{-xy}}{\sqrt{x} + y^2}, \quad [a; b] = [0; 2], \quad y_0 = +\infty.$$

$$401) f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{xy}{1+y}, \quad [a; b] = [-1; 3], \quad y_0 = 0.$$

$$402) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{x^2}{y}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad [a; b] = \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad y_0 = +\infty.$$

Найти следующие пределы.

$$403) \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^3 x^2 \cos(xy) dx. \quad 404) \lim_{y \rightarrow 0} \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

$$405) \lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{\sqrt{3}+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}. \quad 406) \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-y^2 \sin^2 \varphi}}.$$

$$407) \lim_{y \rightarrow 1} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-y^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

$$408) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \int_a^x [f(t+y) - f(t)] dt,$$

где $f(x)$ непрерывна на $[A; B]$, $A < a < x < B$.

$$409) \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} dx. \quad 410) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} e^{-n \sin x} dx.$$

$$411) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}. \quad 412) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{1+x^2} dx.$$

Исследовать на непрерывность функцию

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in Y.$$

$$413) F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx, \quad f(x, y) = \begin{cases} -1, & x < y, \\ 1, & x \geq y, \end{cases}$$

$$Y = (-\infty; +\infty).$$

$$414) F(y) = \int_0^1 K(y, x) v(x) dx, \quad Y = (-\infty; +\infty),$$

$$\text{где } K(y, x) = \begin{cases} y(1-x), & y \leq x, \\ x(1-y), & y > x, \end{cases} \quad v(x) \in C[0; 1].$$

$$415) F(y) = \int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx, \quad Y = \{y: y > 0\}.$$

$$416) F(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx, \quad Y = \{y: y \neq 0\}.$$

$$417) F(y) = \int_0^1 x^y dx, \quad Y = \{y: y \neq 0\}.$$

$$418) F(y) = \int_0^1 \frac{ye^x}{x^2 + y^2} dx, \quad Y = \{y: |y| < \infty\}.$$

$$419) F(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx, \quad f \in C[0; 1], \quad Y = \{y: |y| < \infty\}.$$

$$420) F(y) = \int_0^1 \frac{y^2 x^2}{x^2 + y^2} dx, \quad Y = \{y: |y| < \infty\}.$$

$$421) F(y) = \int_0^1 \frac{dx}{e^x - x + y}, \quad Y = \{y: y > 0\}.$$

$$422) F(y) = \int_0^1 (1+x)^{xy} dx, \quad Y = (-\infty; +\infty).$$

$$423) F(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{xy - \sin x + 1}, \quad Y = \{y: y > 0\}.$$

$$424) F(y) = \int_{\sqrt{y}}^y x^{\cos(xy)} dx, \quad Y = \{y: y > 0\}.$$

Можно или нет вычислить по правилу Лейбница производную функции $F(y)$ в точке $y_0 = 0$?

$$425) F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

$$426) F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx,$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2}, & 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

$$427) F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx,$$

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{y}}, & 0 \leq x \leq 1, 0 < y \leq 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, y = 0. \end{cases}$$

$$428) F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx, \quad f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & y \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & y = 0. \end{cases}$$

Вычислить производную функции $F(y)$.

$$429) F(y) = \int_a^b e^{x^2+y^2} dx. \quad 430) F(y) = \int_0^y (x + xy)^{10} dx.$$

$$431) F(y) = \int_y^2 \sqrt{xy} \sin xy dx. \quad 432) F(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2} dx.$$

$$433) F(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx. \quad 434) F(y) = \int_{a+y}^{b+y} \frac{\sin xy}{x} dx.$$

$$435) F(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} \cos \sqrt{x} y \, dx. \quad 436) F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1+yx)}{x} \, dx.$$

$$437) F(y) = \int_0^y f(x+y, x-y) \, dx,$$

$$f(x, y) \in C^1((-\infty; +\infty) \times (-\infty; +\infty)).$$

$$438) F(y) = \int_0^{1/y} \frac{\ln(1+yx)}{1+y} \, dx, \quad y > 0.$$

$$439) F(y) = \int_0^{y^2} dx \int_{x-y}^{x+y} \sin(x^2 + z^2 - y^2) \, dz.$$

$$440) F(y) = \int_y^{y^2} \exp(-y(x+y)^2) \, dx.$$

$$441) F(y) = \int_0^1 f(x) \operatorname{sign}(\sin yx) \, dx, \quad y > 0, \quad f \in C^1([0; 1]).$$

$$442) F(y) = \int_0^y \left(\int_{-yx}^{yx} e^{yx^3 z^3} \, dz \right) dx, \quad y > 0.$$

Вычислить вторую производную функции $F(y)$.

$$443) F(y) = \int_0^y (x+y) e^x \, dx.$$

$$444) F(y) = \int_0^y (x+y) f(x) \, dx,$$

где $f(x)$ — дифференцируемая на $(-\infty; +\infty)$ функция.

$$445) F(y) = \int_a^b f(x)|x-y| dx,$$

где $f(x)$ — непрерывная на $[a; b]$ функция.

$$446) F(y) = \int_0^y f(x)(y-x) dx,$$

где $f(x)$ — непрерывная на $(-\infty; +\infty)$ функция.

$$447) F(y) = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha d\xi \int_0^\alpha f(y+\xi+\eta) d\eta, \quad \alpha > 0,$$

где $f(x)$ — непрерывная на $(-\infty; +\infty)$ функция.

$$448) \text{ Найти } F''_{xy}, \text{ если } F(x, y) = \int_{x/y}^{xy} (x-yz)f(z) dz,$$

где $f(z)$ — дифференцируемая функция.

449) Проверить, что функция $F(y)$ удовлетворяет уравнению

$$F''(y) = -v(y), \quad y \in [0; 1],$$

$$\text{где } F(y) = \int_0^1 K(y, x)v(x) dx; \quad K(y, x) = \begin{cases} y(1-x), & y \leq x, \\ x(1-y), & y > x \end{cases}$$

и $v(x)$ — непрерывная на $[0; 1]$ функция.

$$450) \text{ Проверить, что функция } u_1(r) = \int_0^\pi e^{nr \cos \varphi} d\varphi \text{ удовле-}$$

$$\text{творяет уравнению } u'' + \frac{1}{r}u' - n^2u = 0.$$

$$451) \text{ Проверить, что функции } y = x^n \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) \sin^{2n} \varphi d\varphi$$

$$\text{и } y = \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi \text{ удовлетворяют уравнению } x^2 y'' +$$

$$+ xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

452) Проверить равенство $F^{(n)}(x) = (n-1)!f(x)$, где

$$F(x) = \int_0^x f(y)(x-y)^{n-1} dy.$$

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы.

$$453) \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 - \sin^2 \varphi) d\varphi, \quad |a| > 1.$$

$$454) \int_0^{\pi/2} \ln(1 + (m^2 - 1)\sin^2 x) dx, \quad m > 1.$$

$$455) \int_0^{\pi/2} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx.$$

$$456) \int_0^{\pi} \ln(1 + 2a \cos x + a^2) dx. \quad 457) \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

$$458) \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + a \sin x}{1 - a \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x}, \quad |a| < 1.$$

$$459) \int_0^{\pi/2} \ln \frac{1 + a \cos x}{1 - a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}, \quad |a| < 1.$$

$$460) \int_0^{\pi} e^{a \cos x} \cos(a \sin x) dx, \quad a > 0.$$

$$461) \int_0^{\pi/4} \operatorname{arctg}(a \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}) dx. \quad 462) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$$

$$463) \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(a \sin x)}{\sin x} dx.$$

$$464) \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx, \quad 0 < a < 1.$$

$$465) \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a \cos x)}{\cos x} dx, \quad 0 < a < 1.$$

$$466) \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + a \sin x)}{\sin x} dx, \quad 0 < a < 1.$$

$$467) \int_0^a \frac{\ln(1 + ax)}{1 + x^2} dx.$$

468) Функцию $f(x) = x^2$ на промежутке $[1; 3]$ приближенно заменить линейной функцией $a + bx$ так, чтобы интеграл

$$I(a, b) = \int_1^3 (a + bx - x^2)^2 dx$$

принимал наименьшее значение.

Выяснить, справедливо или нет равенство

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

для следующих интегралов.

$$469) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y - x}{(x + y)^3} dy.$$

$$470) \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{x^5}{y^4} - \frac{2x^3}{y^3} \right) e^{-\frac{x^2}{y}} dy.$$

$$471) \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy. \quad 472) \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{\cos xy}{x + y} dx.$$

$$473) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} dy \int_0^1 \frac{\operatorname{tg}(xy)}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dx. \quad 474) \int_0^1 dy \int_{-1}^1 \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dx.$$

Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислить следующий интеграл.

$$475) \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

$$476) \int_0^1 \sin \left(\ln \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

$$477) \int_0^1 \cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

$$478) \int_0^{\pi/2} \ln \frac{a + b \sin x}{a - b \sin x} \cdot \frac{dx}{\sin x}, \quad a > b > 0.$$

$$479) \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2n} x \, dx}{(1 - 2a \cos x + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ а) } |a| < 1, \text{ б) } |a| > 1.$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

$$480) \text{ Показать, что интеграл } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

а) сходится равномерно на промежутке $1 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$;

б) сходится неравномерно на промежутке $1 < \alpha < +\infty$.

$$481) \text{ Показать, что интеграл } \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ сходится неравномерно на}$$

промежутке $(0; 1)$.

- 482) Показать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha + 1}$
- а) сходится равномерно на промежутке $1 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$;
 - б) сходится неравномерно на промежутке $1 < \alpha < +\infty$.

- 483) Показать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$
- а) сходится равномерно на промежутке $0 < a \leq \alpha \leq b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$;
 - б) сходится неравномерно на промежутке $0 \leq \alpha \leq b$, $b \in \mathbb{R}$.

Исследовать равномерную сходимость интеграла на множестве M .

- 484) $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x} dx$, а) $M = (-1; 0)$; б) $M = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

- 485) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+(x-\alpha)^4}$,
- а) $M = (-\infty; a]$, $a > 0$; б) $M = [0; +\infty)$.

- 486) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$, $M = (-\infty; +\infty)$.

- 487) $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha^2 - x^2}{(\alpha^2 + x^2)^2} dx$, а) $M = (-1; 1)$; б) $M = \mathbb{R}$.

- 488) $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha - x}{(x + \alpha)^3} dx$, $M = [0; 1]$.

- 489) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}((x-\alpha)^2 + 1)}$, $M = (2; +\infty)$.

- 490) $\int_0^1 \frac{\alpha^2 - x^2}{\sqrt{x}(\alpha^2 + x^2)^2} dx$, $M = (0; 1)$.

$$491) \int_0^1 \frac{x^2 \alpha - \alpha^3}{\sqrt{x}(\alpha^2 + x^2)^2} dx, \quad M = (0; 1).$$

$$492) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)(1-\alpha x)}},$$

а) $M = (0; \alpha_0)$, $\alpha_0 < 1$; б) $M = (0; 1)$.

$$493) \int_3^{+\infty} \frac{\alpha + x}{(\alpha^2 + x^2)\sqrt{\alpha^2 + x^2}} dx, \quad M = (0; +\infty).$$

$$494) \int_0^{+\infty} \frac{\alpha + x^2}{1 + (\alpha^2 + x^2)^2} dx, \quad M = [0; +\infty).$$

$$495) \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 4}}{(\alpha + 1)x^2} dx, \quad M = (5; +\infty).$$

$$496) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (\alpha + x^2)^2}, \quad M = [0; +\infty).$$

$$497) \int_1^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + \alpha^2 x^2},$$

а) $M = [1; 3]$; б) $M = [1; +\infty)$; в) $M = [0; 3]$.

$$498) \int_0^1 \frac{\alpha}{(x^2 + \alpha^2)\sqrt{x}} dx, \quad M = (0; +\infty).$$

$$499) \int_0^1 \frac{dx}{|2x-1|^\alpha}, \quad \text{а) } M = \left(0; \frac{2}{3}\right); \quad \text{б) } M = (0; 1).$$

$$500) \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx,$$

а) $M = (-\infty; \alpha_0)$, $0 < \alpha_0 < 2$; б) $M = (-\infty; 2)$.

$$501) \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{(1-x^2)^\alpha} dx, \quad \text{а) } M = \left(-2; \frac{2}{3}\right); \quad \text{б) } M = (-1; 1).$$

$$502) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \operatorname{arctg} x}{4+x^n} dx, \quad n > 2,$$

$$\text{а) } M = \left(0; \frac{n}{2}\right); \quad \text{б) } M = (0; n-1).$$

$$503) \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \operatorname{arctg} x}{x^2 + \alpha} dx, \quad \text{а) } M = (0; A); \quad \text{б) } M = (0; +\infty).$$

$$504) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \operatorname{arctg} \alpha x^2 dx,$$

$$\text{а) } M = (\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0; \quad \text{б) } M = (0; +\infty).$$

$$505) \int_0^{+\infty} e^{-|x-\alpha|} dx, \quad \text{а) } M = (-\infty; a], \quad a > 0; \quad \text{б) } M = [0; +\infty).$$

$$506) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+\alpha}}{e^x} dx, \quad M = [0; +\infty).$$

$$507) \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx,$$

$$\text{а) } M = [a; b], \quad b > a > 0; \quad \text{б) } M = [0; b], \quad b > 0.$$

$$508) \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad M = [a; b] \subset (0; +\infty), \quad a < 1.$$

$$509) \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad M = [a; b] \subset (0; +\infty).$$

$$510) \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx,$$

$$\text{а) } M = (0; A); \quad \text{б) } M = (0; +\infty); \quad \text{в) } M = (-1; +\infty).$$

$$511) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx,$$

а) $M = (\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$; б) $M = (0; +\infty)$.

$$512) \int_0^{+\infty} (\alpha^3 + x) e^{-\alpha x^2} dx, \quad \text{а) } M = (1; 5); \quad \text{б) } M = (0; 5).$$

$$513) \int_1^{+\infty} x^\alpha e^{x^\alpha} dx, \quad \text{а) } M = (1/2; 2); \quad \text{б) } M = (0; +\infty).$$

$$514) \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx, \quad M = (0; +\infty).$$

$$515) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2(1+\alpha^2)} dx, \quad M = [a; b] \subset (0; +\infty).$$

$$516) \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha^2(1+x^2)} dx, \quad M = [c; d] \subset (0; +\infty).$$

$$517) \int_0^1 \frac{x^a \ln^2 x}{x^2 - 1} dx, \quad \text{а) } M = (-1; 0); \quad \text{б) } M = (-9/10; 0).$$

$$518) \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx, \quad M = [-1; 1].$$

$$519) \int_0^1 x^{\alpha-1} \ln^m x dx,$$

а) $M = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$; б) $M = (0; +\infty)$.

$$520) \int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{1 + x^3} dx, \quad \text{а) } M = (0; 10); \quad \text{б) } M = (0; +\infty).$$

- 521) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x)}{\alpha^2 x^2 + 4} dx$,
а) $M = (a_0; +\infty)$, $a_0 > 0$; б) $M = (0; +\infty)$.
- 522) $\int_1^2 \frac{dx}{|\ln x|^\alpha}$, а) $M = [1/2; 2/3]$; б) $M = (0; 1)$.
- 523) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2}$, $M = \mathbb{R}$.
- 524) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x}} dx$, а) $M = (\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$; б) $M = (0; +\infty)$.
- 525) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} dx$, $M = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$.
- 526) $\int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \cos \alpha x}{1 + x^2} dx$, а) $M = (1; 10)$; б) $M = (0; 10)$.
- 527) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1 + x^2} dx$, а) $M = [a_0; +\infty)$, $a_0 > 0$; б) $M = (0; +\infty)$.
- 528) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha^2 x)}{x + \alpha} dx$, $M = [1; +\infty)$.
- 529) $\int_0^1 x^\alpha \sin \frac{1}{x} dx$,
а) $M = [-2 + \varepsilon; +\infty)$, $\varepsilon > 0$; б) $M = (-2; +\infty)$.
- 530) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha^2 + x^2}} dx$, а) $M = [\alpha_0; +\infty)$, $\alpha_0 > 0$; б) $M = (0; +\infty)$.

- 531) $\int_1^{+\infty} \frac{\alpha \cos(\alpha^2 x)}{1+x^\alpha} dx$, а) $M = (1; 10)$; б) $M = (0; 10)$.
- 532) $\int_1^{+\infty} \cos(\alpha x^3) dx$, $M = [1; +\infty)$.
- 533) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha x^3)}{x} dx$, $M = [1/2; +\infty)$.
- 534) $\int_0^{+\infty} x^\alpha \sin x^3 dx$, а) $M = (0; 1)$; б) $M = (0; 2)$.
- 535) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^\alpha} dx$, $M = (0; +\infty)$.
- 536) $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos \pi x dx}{(x-\alpha)^2+1}$, а) $M = (0; A)$, $A > 0$; б) $M = (0; +\infty)$.
- 537) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{1+x^\alpha} dx$, $M = (0; +\infty)$.
- 538) $\int_0^{+\infty} \sin x^\alpha dx$, а) $M = (A; +\infty)$, $A > 1$; б) $M = (1; +\infty)$.
- 539) $\int_0^{+\infty} \sin x \sin \frac{\alpha}{x} dx$, $M = [0; 1]$.
- 540) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha^2 x)}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \alpha x dx$, $M = [1/2; +\infty)$.
- 541) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 \operatorname{arctg} \alpha x dx$, $M = \mathbb{R}$.

$$542) \int_0^{+\infty} \sin(\alpha e^x) dx, \quad \text{а) } M = (1; +\infty); \quad \text{б) } M = (0; 1).$$

$$543) \int_0^{+\infty} \frac{\alpha x \cos \alpha x dx}{\alpha^4 x^2 + 4},$$

$$\text{а) } M = (0; +\infty); \quad \text{б) } M = (a_0; +\infty), \quad a_0 > 0.$$

$$544) \int_0^{+\infty} \sin(x^2 + \alpha x) dx, \quad M = (0; +\infty).$$

$$545) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx, \quad M = (\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0.$$

$$546) \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+\alpha^2)} \sin x dx, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$547) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx, \quad M = [0; +\infty).$$

$$548) \int_0^1 \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot 2^{\alpha x} dx, \quad M = (-\infty; 1].$$

$$549) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \cos x dx, \quad M = [a, b]$$

и отрезок $[a; b]$ не содержит точек $\alpha = \pm 1$.

$$550) \int_a^{+\infty} e^{-x\alpha} f(x) dx, \quad M = [0; +\infty), \quad \text{если } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится.}$$

$$551) \int_a^{+\infty} e^{-x^2\alpha} f(x) dx, \quad M = [0; +\infty), \quad \text{если } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится.}$$

$$552) \int_0^1 (1+x+\dots+x^{n-1}) \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx, \quad M = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

$$553) \int_1^{+\infty} \frac{n}{x^3} e^{-\frac{n}{2x^2}} dx, \quad M = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

$$554) \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{\alpha+1}{\alpha x^3+x}} dx, \quad \text{а) } M = (0; 1); \quad \text{б) } M = (1; +\infty).$$

Исследовать равномерную сходимость интеграла относительно параметра α на множестве M .

$$555) \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx, \quad M = [\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0.$$

$$556) \int_0^1 x^{\beta-1} (1-x)^{\alpha-1} dx, \quad M = [\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0.$$

$$557) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln^2 x}{\sqrt{x^3(x^8-\beta^2)}} dx, \quad M = (1; 4), \quad \beta > 0.$$

$$558) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{\sqrt{x^2-\beta^2}} dx, \quad M = (-1; 1), \quad \beta > 0.$$

$$559) \int_0^{+\infty} e^{-x\alpha} \frac{\cos x}{x^\beta dx}, \quad 0 < \beta < 1, \quad M = [0; +\infty).$$

$$560) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx, \quad \beta > 0, \quad M = [\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0.$$

$$561) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x\alpha}{x^\beta} dx, \quad 0 < \beta < 1,$$

а) $M = [\alpha_0; +\infty), \quad \alpha_0 > 0;$ б) $M = (0; +\infty).$

Доказать равенства.

$$562) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{2 dx}{(\alpha x^3 + 1)\sqrt{x}} = 1.$$

$$563) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} e^{-\alpha x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$564) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx, \text{ если } \int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится.}$$

$$565) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x dx = 1.$$

$$566) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos x dx = 0.$$

$$567) \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1 + \alpha^2 x^2} = 0.$$

$$568) \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sin(x^2) \operatorname{arctg} \alpha x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx.$$

$$569) \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$570) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$571) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (\alpha + x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$572) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \frac{(\alpha + x^2) dx}{1 + (\alpha + x^2)^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

$$573) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-x} dx.$$

$$574) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-nx}}{x} \sin x dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$575) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt[3]{1-x}} dx = 0. \quad 576) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{\sin^n \pi x}{\sqrt[3]{\ln 2x}} dx = 0.$$

$$577) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\sqrt{|1-x|}} x dx = 0. \quad 578) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^n}{1+x^{2n}} = 1.$$

$$579) \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^\alpha} dx = 1.$$

$$580) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2 x^2} \sin x dx = 0.$$

$$581) \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2 x^2} \sin x dx = \frac{1}{2}.$$

$$582) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+u)}{\alpha^2 + u^2} du = \pi \cdot \frac{\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x+\alpha) + \lim_{\alpha \rightarrow 0} f(x-\alpha)}{2}.$$

$$583) \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \alpha \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \operatorname{arctg} x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Исследовать на непрерывность в указанном множестве M следующую функцию $F(\alpha)$.

$$584) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{10 - 4x + x^\alpha}, \quad M = (2; +\infty).$$

$$585) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{1+x^3}} dx, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$586) F(\alpha) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos \frac{\alpha}{x}}{x^{4/3}} dx, \quad M = (0; 2).$$

$$587) F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{4+x^\alpha} dx, \quad M = (0; +\infty).$$

$$588) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \sin(\alpha x^2) dx, \quad M = (0; +\infty).$$

$$589) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+(x+\alpha)^2} dx, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$590) F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(x-\alpha)^2+1} dx, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$591) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha^2} dx, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$592) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-x\alpha} dx, \quad M = [0; +\infty).$$

$$593) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \sqrt{x} dx, \quad M = (0; +\infty).$$

$$594) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{2+x}} e^{-\alpha x} dx, \quad M = [0; +\infty).$$

$$595) F(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^\alpha x}, \quad M = [0; 1).$$

$$596) F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad M = (0; 2).$$

$$597) F(\alpha) = \int_0^1 \ln^\alpha(1+x^2) dx, \quad M = (-1/2; +\infty).$$

$$598) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin x^2 dx, \quad M = [0; +\infty).$$

$$599) F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{\alpha}{x^2}\right) \ln x dx, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$600) F(\alpha) = \int_0^1 \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{|x-\alpha|}}, \quad M = [0; 1].$$

$$601) F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin \frac{\alpha}{x}}{x^\alpha} dx, \quad M = (0; 2).$$

$$602) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-\alpha^2)x}{x} dx, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$603) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$604) F(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2 + \alpha^2 + 1)}, \quad M = \mathbb{R}.$$

$$605) F(\alpha) = \begin{cases} \int_1^{+\infty} \frac{\ln(e^{\alpha^2 x} + 1)}{x^2 + \alpha^2} dx, & \alpha \neq 0 \\ \ln 2, & \alpha = 0, \end{cases} \quad M = \mathbb{R}.$$

$$606) F(\alpha) = \begin{cases} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\operatorname{arctg}(x^2 + \alpha^2) \sin x}, & \alpha \neq 0 \\ 0, & \alpha = 0, \end{cases} \quad M = \mathbb{R}.$$

$$607) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \sin x}{x^\alpha + 1} dx, \quad M = \mathbb{R}.$$

Найти производную функции $F(\alpha)$.

$$608) F(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^2}, \quad \alpha > 0.$$

$$609) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + (x + \alpha)^2} dx, \quad |\alpha| < \infty.$$

$$610) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos \alpha x dx, \quad |\alpha| < \infty.$$

$$611) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2}, \quad \text{а) } \alpha > 0; \text{ б) } |\alpha| < \infty.$$

$$612) F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{(1 + x^2)^2} dx, \quad |\alpha| < \infty.$$

$$613) F(\alpha) = \int_\alpha^{+\infty} e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha > 0.$$

$$614) F(\alpha) = \int_\alpha^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx, \quad \alpha > 0.$$

$$615) F(\alpha) = \int_\alpha^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{1 + x^3} dx.$$

Найти множество M точек дифференцируемости функции $F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) dx$ и проверить, справедливо или нет равенство $F'_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha) dx$ для $\alpha \in M$.

$$616) F(\alpha) = \int_0^2 \frac{e^{-x\alpha}}{\sqrt{x}} \sin \frac{1}{x} dx.$$

$$617) F(\alpha) = \int_{-1}^1 \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3 + |\alpha| + 2}.$$

$$618) F(\alpha) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, & \alpha \neq 0 \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$

619) Пусть $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{\alpha - x}}$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своей производной на $[0; a]$. Доказать, что при $0 < \alpha < a$ справедливо равенство $I'_\alpha = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^\alpha \frac{\varphi'(x) dx}{\sqrt{\alpha - x}}$.

620) Пользуясь равенством $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$, $\alpha > 0$, вычислить

$$\text{интеграл } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx.$$

621) Пользуясь равенством $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$, вычислить интеграл $\int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx$.

622) Пользуясь равенством $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$, $a > 0$, вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$.

623) Пользуясь равенствами

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^{+\infty} x e^{-nx} \sin x \, dx; \quad \text{б) } \int_0^{+\infty} x e^{-nx} \cos x \, dx; \\ \text{в) } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} \sin x \, dx; \quad \text{г) } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} \cos x \, dx; \\ \text{д) } \int_0^{+\infty} x^3 e^{-nx} \sin x \, dx; \quad \text{е) } \int_0^{+\infty} x^3 e^{-nx} \cos x \, dx. \end{aligned}$$

624) Пользуясь равенством $\int_0^1 x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n}$, вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^1 \frac{x^{n-1} - 1}{\ln x} \, dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \left(\frac{x^{n-1}}{x \ln^2 x} - \frac{n}{\ln x} \right) \, dx; \\ \text{в) } \int_0^1 \left(\frac{x^{n-1}}{x \ln^3 x} - \frac{n}{x \ln^2 x} - \frac{n^2}{2 \ln x} \right) \, dx. \end{aligned}$$

625) Пользуясь результатами задачи 624, вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x} \, dx;$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \int_0^{+\infty} \left(\frac{ne^{-x}}{x} - \frac{1-e^{-nx}}{x^2} \right) dx; \\ \text{в)} \quad & \int_0^{+\infty} \left(\frac{n^2 e^{-x}}{2x} - \frac{n}{x^2} + \frac{1-e^{-nx}}{x^3} \right) dx. \end{aligned}$$

Используя значение интеграла Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha$$

(см. пример 49, § 3), вычислить интеграл.

$$\begin{aligned} 626) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx. & 627) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^2} dx. \\ 628) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 \alpha x}{x^3} dx. & 629) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5 \alpha x}{x^5} dx. \\ 630) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x^3} dx. & 631) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^4} dx. \\ 632) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx. & 633) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin \beta x}{x^2} dx. \\ 634) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx. & 635) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x \cos \gamma x}{x^2} dx. \\ 636) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x \sin \gamma x}{x^3} dx. & 637) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x \cos \gamma x}{x} dx. \\ 638) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x \cos \alpha x}{x} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 639) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cdot \sin^2 x}{x^3} dx, \quad & 640) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x \cos \alpha x}{x^2} dx. \\
 641) \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx, \quad & 642) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} dx.
 \end{aligned}$$

Используя значение интеграла Пуассона

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(см. пример 51, § 3), вычислить интеграл.

$$\begin{aligned}
 643) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} dx, \quad \alpha > 0. \\
 644) \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-\alpha^2 x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha > 0. \\
 645) \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-\alpha^2 x^2} dx, \quad \alpha > 0. \\
 646) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha x^2 + 2\beta x + c)} dx, \quad \alpha > 0, \quad \alpha c - \beta^2 > 0. \\
 647) \int_0^{+\infty} (\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 x + c_1) e^{-(\alpha x^2 + 2\beta x + c)} dx, \quad \alpha > 0, \quad \alpha c - \beta^2 > 0. \\
 648) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2 - \frac{\beta^2}{x^2}} dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \\
 649) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \operatorname{ch} \beta x dx, \quad \alpha > 0.
 \end{aligned}$$

$$650) \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha^2 x^2} \operatorname{sh} \beta x \, dx, \alpha > 0.$$

$$651) \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \operatorname{ch} 2\beta x \, dx.$$

$$652) \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} \operatorname{sh} 2\beta x \, dx.$$

$$653) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} \cos 2\beta x \, dx, \alpha > 0.$$

$$654) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \operatorname{sh}(\beta \sqrt{x}) \, dx, \alpha > 0.$$

$$655) \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \cos 2x \, dx.$$

$$656) \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2\beta x \, dx, n \in \mathbb{N}.$$

$$657) \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} \sin \beta x \, dx, \alpha > 0.$$

$$658) \int_0^{+\infty} x^{2n-1} e^{-x^2} \sin 2\beta x \, dx, n \in \mathbb{N}.$$

Используя значение интеграла Лапласа

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|}$$

(см. пример 55, § 3), вычислить интеграл.

$$659) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\alpha^2 + x^2} dx, \alpha > 0. \quad 660) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2} dx.$$

$$661) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1 + x^2)} dx, \alpha > 0. \quad 662) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1 + x^2)^2} dx.$$

$$663) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2 + 2bx + c} dx, \alpha > 0, ac - b^2 > 0.$$

$$664) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2 + \alpha^2} \cdot \frac{\sin x}{x} dx, \alpha > 0.$$

$$665) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{(1 + x^2)^2} dx, \alpha > 0.$$

Используя значение интегралов Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

(см. пример 52, § 3), вычислить интеграл.

$$666) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx. \quad 667) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x^2) \cos 2ax dx.$$

$$668) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax dx.$$

Применяя метод дифференцирования по параметру, вычислить интеграл.

$$669) \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{\ln x} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$670) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - \cos \beta x}{x^2} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$671) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-nx}}{x} \cos x dx, n > 0.$$

$$672) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$673) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-nx}}{x} \sin x dx, n > 0.$$

$$674) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$675) \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{\alpha^2}{x^2}} - e^{-\frac{\beta^2}{x^2}} \right) dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$676) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$677) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$678) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$679) \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$680) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x \cos \gamma x}{x} dx, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

$$681) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x - \sin \gamma x}{x} e^{-\alpha x} dx, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

$$682) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x - \cos \gamma x}{x} e^{-\alpha x} dx, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

$$683) \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x e^x} dx, \alpha > 0.$$

$$684) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx, \beta > \alpha > 0.$$

$$685) \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{i=1}^n A_i e^{-\alpha_i x}}{x} dx, \sum_{i=1}^n A_i = 0, \alpha_i > 0.$$

$$686) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-\alpha x} - x(\alpha - \beta)e^{-\alpha x}}{x^2} dx, \alpha > \beta > 0.$$

$$687) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x}{x} dx, \alpha > 0.$$

$$688) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin^2 \beta x}{x^2} dx, \alpha > 0.$$

$$689) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x \sin \gamma x}{x^2} dx, \alpha > 0, \beta \geq \gamma > 0.$$

$$690) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin^3 \beta x}{x} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$691) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin^3 \beta x}{x^2} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$692) \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq 1.$$

$$693) \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x \sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq 1.$$

$$694) \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \quad |\alpha| \leq 1.$$

$$695) \text{ а) } \int_0^1 \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$696) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{1 + \beta^2 x^2} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$697) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$698) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$699) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

$$700) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x}{x(1 + \beta^2 x^2)} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$701) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \operatorname{arctg} \beta x}{x^3} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$702) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \cdot \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} dx, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$703) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$704) \int_0^{+\infty} \ln \frac{b^2 + x^2}{c^2 + x^2} \cos \alpha x dx, \alpha > 0, b > 0, c > 0.$$

$$705) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)^2} dx, \alpha > 0.$$

$$706) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^3} dx, \alpha > 0.$$

$$707) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \beta x}{x^2} e^{-\alpha x} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$708) \int_0^{+\infty} \frac{2x\beta \sin 2\beta x + \cos 2\beta x - 1}{x^2} e^{-\alpha^2 x^2} dx, \alpha > 0, \beta > 0.$$

$$709) \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \sqrt{mx} dx, \alpha > 0.$$

$$710) \text{ Вычислить } \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1-x^2}} dx \text{ следующими способами:}$$

$$1) \text{ используя равенство } \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{1 + \alpha^2 x^2};$$

$$2) \text{ рассмотреть функцию } I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x\alpha}{x\sqrt{1-x^2}} dx \text{ и приме-}$$

нить метод дифференцирования по параметру.

711) Рассматривая производные функций, стоящих в правой и левой частях, проверить справедливость равенств:

$$\text{а) } \int_0^x e^{t^2} dt = e^{x^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin 2xt dt;$$

$$\text{б) } \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{e^{-x^2(u^2+1)}}{u^2+1} du;$$

$$\text{в) } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+a^x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \ln(1+a^2) - \int_0^a \frac{\ln t}{1+t^2} dt, \quad a > 0;$$

$$\text{г) } \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \frac{\sin 2tx}{t} dt.$$

712) Используя равенства

$$\frac{1}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin x dx, \quad \frac{t}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos x dx,$$

доказать равенства

$$\text{а) } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x+a} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}}{1+t^2} dt, \quad a > 0;$$

$$\text{б) } \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x+a} = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1+t^2} dt, \quad a > 0.$$

Преобразование Вейерштрасса $\Phi(p)$ функции $f(t)$ определяется формулой

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(p-t)^2} f(t) dt.$$

Найти преобразование Вейерштрасса функции $f(t)$.

$$713) f(t) = 1.$$

$$714) f(t) = t^2.$$

$$715) f(t) = e^{2\alpha t}.$$

$$716) f(t) = \cos \alpha t.$$

Преобразование Лапласа $F(p)$ функции $f(t)$ определяется формулой

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Найти преобразование Лапласа функции $f(t)$.

717) $f(t) = 1$.

718) $f(t) = e^{\alpha t}$.

719) $f(t) = \sin \beta t$.

720) $f(t) = \cos \beta t$.

721) $f(t) = t^n, n \in \mathbb{N}$.

722) $f(t) = \sqrt{t}$.

723) $f(t) = te^{-\alpha t}$.

724) $f(t) = \sin(\alpha\sqrt{t})$.

725) $f(t) = \begin{cases} \frac{1-e^{-t}}{t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$

726) Пусть $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$ и интегрируема на любом конечном отрезке. Доказать, что при $x > 0$ функция

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(z)}{x^2 + (y-z)^2} dz$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

727) Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$. Доказать, что интеграл

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и начальному условию $\lim_{t \rightarrow 0+} u(x, t) = f(x)$.

Пусть ω — особая точка функции f и $\omega \in (a; b)$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{\omega-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\omega+\varepsilon}^b f(x) dx \right),$$

если он существует, называется главным значением интеграла $\int_a^b f(x) dx$ в смысле Коши и обозначается в.р. $\int_a^b f(x) dx$.

Главным значением в смысле Коши интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, если $f \in \tilde{R}[-A; A]$ для любого $A \in \mathbb{R}$, называется $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$

и обозначается в.р. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Найти в.р. $\int_a^b f(x) dx$ для следующих интегралов.

$$728) \int_a^b \frac{dx}{x-c}, \quad a < c < b. \quad 729) \int_a^b \frac{dx}{(x-c)^{2n+1}}, \quad a < c < b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$730) \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{k - \sin \varphi}, \quad 0 < k < 1. \quad 731) \int_0^2 \frac{x^{\alpha-1}}{1-x} dx, \quad \alpha > 0.$$

$$732) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}. \quad 733) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2}.$$

$$734) \int_{1/2}^2 \frac{dx}{x \ln x}. \quad 735) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

$$736) \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx. \quad 737) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}.$$

$$738) \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx. \quad 739) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx.$$

Ответы к главе I

- 1) При $\alpha > 1$ сходится к $\frac{1}{\alpha-1}a^{1-\alpha}$, при $\alpha \leq 1$ расходится.
- 2) Сходится при $\alpha < 1$ к $\frac{1}{1-\alpha} \cdot 10^{1-\alpha}$, при $\alpha \geq 1$ расходится.
- 3) При $\alpha < 1$ сходится к $\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, при $\alpha \geq 1$ расходится.
- 4) При $\alpha < 1$ сходится к $\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, при $\alpha \geq 1$ расходится.
- 5) Расходится. 6) $\frac{1}{2}$. 7) $\frac{\pi}{2}$. 8) $\frac{1}{8}$. 9) Расходится. 10) $\frac{1}{ab} \cdot \frac{\pi}{2}$.
- 11) Расходится. 12) Расходится. 13) $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$. 14) Расходится.
- 15) $\frac{\pi}{4a}$. 16) $\frac{\ln|b| - \ln|a|}{b^2 - a^2}$, $|a| \neq |b|$; $\frac{1}{2a^2}$, $|a| = |b|$. 17) $\frac{3\pi}{8}$.
- 18) $\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2} \arctg \frac{3}{2}$. 19) $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{|a| + |b|}$. 20) $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{|ab|(|a| + |b|)}$.
- 21) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. 22) $-\frac{4}{3}$. 23) $2 \ln 6$. 24) π .
- 25) $\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{4}$. 26) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 27) π . 28) $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 29) $\frac{\pi(b-a)}{2}$.
- 30) $\frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$. 31) π . 32) $\frac{\pi(a+b)}{2}$. 33) $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$.
- 34) $\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}$. 35) $\frac{1}{2}e^5$. 36) $-\frac{1}{\ln 5} + \frac{2}{(\ln 5)^2} - \frac{2}{(\ln 5)^3}$.
- 37) $-2e^{-1}$. 38) Расходится. 39) Расходится.
- 40) Расходится при всех α . 41) Расходится. 42) -1 .
- 43) Сходится при $\alpha > 1$ к $\frac{1}{\alpha-1}$, расходится при $\alpha \leq 1$.
- 44) $\frac{1}{\ln 2}$. 45) Расходится. 46) Расходится. 47) $-\frac{4}{3}$. 48) 1 .
- 49) $\frac{\pi^2}{2}$. 50) 2 . 51) $\frac{3}{2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}$. 52) $\frac{\pi^2}{8}$. 53) $\frac{49}{16}$. 54) Расходится.
- 55) Сходится при $|a| < 1$ к $\frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}}$, расходится при $|a| \geq 1$.
- 56) Сходится при $|a| > 1$ к $\frac{\pi}{4\sqrt{a^2-1}}$, расходится при $|a| \leq 1$.
- 57) $\frac{\pi}{4}$. 58) Расходится. 59) $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} \ln 2$. 60) $-\frac{1}{8}$. 61) 1 .

- 62) $\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$. 63) $\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$. 64) $\frac{1}{2}$. 65) $2\sqrt{2}$. 66) $\frac{1}{2e}$.
- 67) Сходится.
- 68) Сходится при $0 < \alpha < 1$, расходится при $\alpha \leq 0$ и при $\alpha \geq 1$.
- 69) Расходится.
- 70) Сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geq 1$.
- 71) Сходится при $\frac{1}{3} \leq p < 1$, расходится при $p \geq 1$.
- 72) Расходится. 73) Сходится.
- 74) Сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.
- 75) Сходится при $\alpha > 0, \beta > 0$, расходится при $\alpha \leq 0, \beta$ —
любом и при $\beta \leq 0, \alpha$ — любым.
- 76) При любом α расходится. 77) Сходится. 78) Сходится.
- 79) Сходится. 80) Сходится. 81) Сходится. 82) Расходится.
- 83) Сходится. 84) Сходится.
- 85) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$.
- 86) Сходится. 87) Сходится. 88) Сходится. 89) Сходится.
- 90) Сходится.
- 91) Сходится при $1 < \alpha < 2$, расходится при $\alpha \leq 1$ и при $\alpha \geq 2$.
- 92) Сходится. 93) Сходится.
- 94) Сходится при $n > 1$, расходится при $n \leq 1$.
- 95) Расходится. 96) Сходится. 97) Расходится.
- 98) Сходится. 99) Сходится.
- 100) Сходится при $p < 1$, расходится при $p \geq 1$.
- 101) Сходится при $\alpha \geq 0$, расходится при $\alpha < 0$.
- 102) Сходится при $|p| < 1$, расходится при $|p| \geq 1$.
- 103) Сходится. 104) Сходится.
- 105) Сходится при $\alpha < 3$, расходится при $\alpha \geq 3$.
- 106) Сходится при $1 < p < 2$, расходится при $0 < p \leq 1$ и при
 $p \geq 2$.
- 107) Сходится. 108) Сходится. 109) Сходится.
- 110) Сходится, если $\alpha\beta > 0$.
- 111) Сходится при $m > -2, \frac{n}{2} - m > 1$, расходится в против-
ном случае.
- 112) Расходится. 113) Сходится. 114) Сходится.
- 115) Сходится.
- 116) Сходится при $p < 3$, расходится при $p \geq 3$.
- 117) Расходится. 118) Сходится.

- 119) Сходится при $\alpha > 0$ и $\beta > -1$; расходится при $\alpha \leq 0$ и любом β и при $\beta \leq -1$ и любом α .
- 120) Сходится при $p > -1$, любом q и при $p = -1$, $q > -1$; расходится при $p = -1$, $q \leq -1$ и при $p < -1$ и любом q .
- 121) Сходится при $p > 1$, q любом и при $p = 1$, $q > 1$; расходится при $p = 1$, $q \leq 1$ и при $p < 1$ и любом q .
- 122) Сходится. 123) Расходится при любом α .
- 124) Сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$.
- 125) Расходится при любом α . 126) Сходится.
- 127) Сходится при $p < 1$, расходится при $p \geq 1$.
- 128) Сходится. 129) Сходится.
- 130) Сходится при $1 < \alpha < 2$, расходится при $\alpha \leq 1$ и при $\alpha \geq 2$.
- 131) Сходится.
- 132) Сходится при $p > -1$, расходится при $p \leq -1$.
- 133) Сходится. 134) Расходится. 135) Расходится.
- 136) Расходится. 137) Сходится. 138) Сходится.
- 139) Сходится.
- 140) Сходится при $\alpha < -\frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \geq -\frac{1}{2}$.
- 141) Сходится при $\beta < 1$, α — любым и при $\beta = 1$, $\alpha < -1$, расходится в противном случае.
- 142) Сходится при $k < -1$, расходится при $k \geq -1$.
- 143) Расходится. 144) Расходится. 145) Сходится.
- 146) Сходится. 147) Сходится. 148) Расходится.
- 149) Сходится. 150) Расходится. 151) Сходится.
- 152) Расходится. 153) Сходится.
- 154) Сходится при $2 < \alpha < 3$, расходится при $\alpha \leq 2$ и $\alpha \geq 3$.
- 155) Сходится.
- 156) Сходится при $\alpha > \frac{3}{4}$, расходится при $\alpha \leq \frac{3}{4}$.
- 157) Сходится. Указание. Использовать соотношение
- $$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi(n-1)}^{\pi n} f(x) dx.$$
- 158) Сходится при $n > 4$, расходится при $n \leq 4$. См. указание к № 157.
- 159) Сходится. См. указание к № 157. 160) Расходится.

- 161) Сходится. 162) Сходится. 163) Сходится.
164) Сходится.
165) Сходится, если $\min(p, q) < 1$ и $\max(p, q) > 1$, расходится в противном случае.
166) Сходится.
167) Сходится условно при всех k и $a \neq 0$, сходится абсолютно при $a = 0$.
168) Сходится условно при всех $a > 0$.
169) Сходится абсолютно при $1 < \alpha < 2$, сходится условно при $0 < \alpha \leq 1$, расходится при $\alpha \leq 0$ или $\alpha \geq 2$.
170) Сходится условно при $0 < a < 1$, расходится при $a \leq 0$ или $a \geq 1$.
171) Сходится условно при $a \neq 0$ и $0 < \alpha \leq 1$, сходится абсолютно при $\alpha > 1$ и любом a ; расходится при $\alpha = 0$ и любом a и при $\alpha \leq 1$ и $a = 0$.
172) Сходится абсолютно. 173) Сходится условно.
174) Сходится абсолютно при $a > 2$, сходится условно при $1 < a \leq 2$.
175) Сходится абсолютно при $\max(p, q) > 2$. Сходится условно, если $1 < \max(p, q) \leq 2$, расходится, если $\max(p, q) \leq 1$.
176) Сходится абсолютно, если $q > p + 1$ и $p > -2$, сходится условно, если $p < q \leq p + 1$, $p > -2$; расходится, если $p \geq q$ или $p \leq -2$ при любом q .
177) Сходится условно.
178) Сходится абсолютно при $n > m + 1$, сходится условно при $m < n \leq m + 1$, расходится, если $m \geq n$.
179) Сходится абсолютно, если $p > -1$ и $q > p + 1$, сходится условно, если $p > -1$ и $p < q \leq p + 1$, расходится, если $p > -1$ и $p \geq q$ или $p \leq -1$ при любом q .
180) Сходится абсолютно, если $\lambda < -1$. Сходится условно, если $\lambda \geq -1$.
181) Сходится условно. 182) Сходится условно.
183) Сходится условно при $0 < \alpha \leq 1$, сходится абсолютно при $\alpha > 1$; расходится при $\alpha \leq 0$.
184) Сходится условно.

- 185) Сходится абсолютно при $-1 < \frac{1-p}{q} < 0$, сходится условно при $0 \leq \frac{1-p}{q} < 1$, расходится при $q = 0$ и любом p или при $\left| \frac{1-p}{q} \right| \geq 1$.
- 186) Сходится абсолютно при $p < 1$, сходится условно при $1 \leq p < 2$.
- 187) Сходится условно. 188) Сходится условно.
- 189) Сходится условно.
- 190) Сходится условно при $p < 2$; расходится при $p \geq 2$.
- 191) Сходится абсолютно. 192) Сходится условно.
- 193) Сходится условно.
- 194) Сходится условно при $\alpha > -1$; расходится при $\alpha \leq -1$.
- 195) Сходится условно.
- 196) Сходится условно при $\alpha \neq 0$; расходится при $\alpha = 0$.
- 197) Сходится условно при $-1 < p \leq 1$; расходится при $p \leq -1$ или $p \geq 2$; сходится абсолютно при $1 < p < 2$.
- 198) Сходится условно при $0 < p \leq 1$, сходится абсолютно при $p > 1$.
- 199) Сходится условно при $0 < p < 2$. 200) Сходится условно.
- 201) Сходится условно при $q > 1$, расходится при $0 < q \leq 1$.
- 202) Сходится абсолютно. 203) Сходится условно.
- 204) Сходится условно.
- 205) Сходится условно. Указание. См. задачу 48 гл. I § 5.
- 206) Сходится условно. Указание. См. задачу 48 гл. I § 5.
- 207) Расходится. Указание. Показать, что функция
- $$F(x) = \int_0^x e^{\sin x} \sin x \, dx$$
- удовлетворяет условию $C_1 x \leq F(x) \leq C_2 x$ для $x > 2\pi$, где $0 < C_1 < C_2$.
- 208) Сходится условно. 209) Сходится условно.
- 210) Сходится условно при $0 < \alpha \leq 1$, сходится абсолютно при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 0$.
- 211) Сходится условно. Сравните с предыдущим примером.
- 212) Расходится.

213) Сходится абсолютно при $\beta > \alpha + 1$, расходится при $\beta \leq \alpha + 1$.

214) Сходится абсолютно при $\beta > 2(\alpha + 1)$, расходится при $\beta \leq 2(\alpha + 1)$.

215) Сходится условно. Указание.

$$\frac{1}{2\sqrt{n-1}} \leq \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx \leq \frac{2}{\sqrt{n-1}}.$$

216) Сходится абсолютно. См. указание к № 215.

217) Собственный. 218) Сходится. 219) Сходится.

220) Сходится.

221) Расходится при $\alpha \geq 1$, сходится при $\alpha < 1$.

222) Сходится. 223) Сходится. 224) Сходится.

225) Собственный. 226) Сходится. 227) Собственный.

228) Расходится. 229) Расходится. 230) Сходится.

231) Собственный. 232) Сходится. 233) Расходится.

234) Собственный. 235) Сходится. 236) Сходится.

237) Сходится. 238) Расходится. 239) Собственный.

240) Сходится. 241) Сходится. 242) Собственный.

243) Расходится. 244) Собственный. 245) Расходится.

246) Сходится. 268) $\frac{\pi}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}$. 269) $\frac{\arcsin \alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$.

270) $\frac{\pi}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}$. 271) $\frac{\ln(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})}{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}}$.

272) $\frac{\ln(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1})}{\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}$ при $\alpha > 1$; 1 при $\alpha = 1$;
 $\frac{\arccos \alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$ при $0 < \alpha < 1$.

273) $I_n = n I_{n-1}$, $I_n = n!$.

274) $I_n = \frac{2n-1}{2} I_{n-1}$, $I_n = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$. Указание. Применить результат примера 51 гл. I § 3.

- 275) $I_n = \frac{n(n-1)I_{n-2}}{n^2 + \alpha^2}$, $I_0 = \frac{1}{\alpha}$, $I_1 = \frac{1}{1 + \alpha^2}$,
 $I_{2k-1} = \frac{(2k-1)!}{(1 + \alpha^2)(3^2 + \alpha^2) \dots [(2k-1)^2 + \alpha^2]}$,
 $I_{2k} = \frac{(2k)!}{\alpha(\alpha^2 + 2^2)(\alpha^2 + 4^2) \dots (\alpha^2 + (2k)^2)}$.
- 276) $I_n(m) = -\frac{m}{n+1}I_n(m-1)$, $I_n(m) = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$.
- 277) $I_n(m) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$. 278) $I_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \sin(n+1) \frac{\pi}{4}$.
- 279) $I_n = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} \cos(n+1) \frac{\pi}{4}$. 280) $2^{2n} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n+1)^2}$.
- 281) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi A^{n-1}}{(AC - B^2)^{n+\frac{1}{2}}}$. 282) $\frac{(-1)^{n-1} \pi}{4n}$.
- 283) $(-1)^n \left(-\frac{1}{\alpha} + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^{m-1} \cdot \alpha}{\alpha^2 + 4m^2} \right)$.
- 284) $(-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} e^{\frac{m^2}{\alpha}} \right)$. 285) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.
- 286) $(-1)^n \cdot n!$. 287) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$.
- 288) $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} \pi$, $n = 2k$; $I_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}$, $n = 2k-1$.
- 289) $n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k \ln(k+1)$. 304) $\frac{\pi^2}{12}$. 305) $-\frac{\pi^2}{6}$. 306) 1.
- 307) $\frac{\pi^2}{4}$. 308) $\frac{\pi^2}{6}$. 309) $\frac{\pi^2}{12}$. 310) $\frac{\pi^2}{8a^2}$. 311) $-\frac{\pi^2}{12}$. 312) $-\frac{\pi^2}{6}$.
- 313) $-\frac{\pi^2}{8}$. 314) $-\frac{\pi^2}{24}$. 315) $\frac{\pi^2}{4}$. 316) $\frac{\pi^3}{8}$. 317) $2 - \frac{\pi^2}{6}$.
- 318) $\ln(1 + \sqrt{2})$.
- 319) $-\pi \ln 2$. Указание. $\sin^2 \varphi - \sin^2 \omega = \sin(\varphi - \omega) \cdot \sin(\varphi + \omega)$,
 $a = \sin \omega$.
- 320) $\frac{\pi}{2} \ln 2$. Указание. Сделать замену $\ln \frac{1}{\sin t} = x$ и проинтегрировать по частям.

- 321) $\frac{\pi}{2}$. Указание. Сделать замену $x = \sin t$ и проинтегрировать по частям.
- 322) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 323) $\frac{\pi}{2}$. 324) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 325) $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\pi + \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right]$.
- 326) $\frac{\pi}{2}$. Указание. Обозначить $\cos \varphi = u$ и сделать замены $\cos \varphi = z$ и $(1-z)t = \sqrt{(z-u)(1-z)}$.
- 327) $\frac{\pi}{2} \cos \varphi$. Указание. Обозначить $\cos \varphi = u$ и сделать замены $\cos \varphi = z$ и $(1-z)t = \sqrt{(z-u)(1-z)}$.
- 328) 0. Указание. В интеграле $\int_1^{+\infty} \frac{x^m \ln x dx}{1+x^{2m+2}}$ сделать замену $x = \frac{1}{y}$.
- 329) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$. 330) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$.
- 331) $-\frac{\pi^2}{2} \ln 2$. Указание. Сделать замену $\pi - x = y$.
- 332) $\frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot 3}$. Указание. Проинтегрировать по частям.
- 333) $\frac{\pi}{2} \ln 2$. Указание. Сделать замену $x = \sin y$.
- 334) $-\frac{\pi}{2} \ln 2$. Указание. Сделать замену $x = \sin y$. 335) $-\frac{\pi}{2}$.
- 336) 0. 337) $-2 \ln 2$.
- 338) $\pi \ln 2$. Указание. Сделать замену $x = \operatorname{tg} y$. 339) $\pi \sqrt{2}$.
- 340) 0 при n нечетном, π при n четном. Указание. Выразить этот интеграл через $\int_0^{\pi} \frac{\sin(n-2) \cos x}{\sin x} dx$.
- 341) 0 при n нечетном; $-\frac{\pi}{n}$ при n четном.
- 342) $\frac{\pi}{2}(|b| - |a|)$. Указание. Проинтегрировать по частям и применить результат примера 49 гл. I § 3.
- 343) $\sqrt{\pi}(|b| - |a|)$. Указание. Проинтегрировать по частям и применить результат примера 51 гл. I § 3.
- 344) $\pi(|a| - |b|)$. Указание. Проинтегрировать по частям.
- 345) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Указание. Проинтегрировать по частям.

- 346) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Указание. Проинтегрировать по частям.
- 347) $\frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2^{2\nu}(2\mu)!} \cdot \frac{\pi}{2} \left[(2\nu+1)^{2\mu} - (2\nu+1)(2\nu-1)^{2\mu} + \right.$
 $\left. + \frac{(2\nu+1) \cdot 2\nu}{1 \cdot 2} (2\nu-3)^{2\mu} - \dots \right], n = 2\nu+1, \nu \in \mathbb{N};$
 $\frac{(-1)^{\nu+\mu+1}}{2^{2\nu-1}(2\mu)!} \left[(2\nu)^{2\mu} \ln 2\nu - 2\nu(2\nu-2)^{2\mu} \ln(2\nu-2) + \right.$
 $\left. + \frac{2\nu(2\nu-1)}{1 \cdot 2} (2\nu-4)^{2\mu} \ln(2\nu-4) - \dots \right], n = 2\nu, \nu \in \mathbb{N}.$
- 348) $\frac{\pi (2n-1)!!}{2 (2n)!!}.$
- 349) $\frac{\pi}{2^n(n-1)!} \left[n^{n-1} - n(n-2)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-4)^{n-1} - \dots \right].$
- 351) $\ln \frac{\beta}{\alpha}.$ 352) $\ln \left(1 + \frac{q}{p} \right) \cdot \ln \frac{\beta}{\alpha}.$ 353) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{\alpha}{\beta}.$ 354) $\ln \frac{\beta}{\alpha}.$
- 355) $-\frac{1}{2} \ln 2.$ Указание. Рассмотреть тождество
 $\frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{e^x - e^{-x}} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2x} (e^{-x} - e^{-2x}) +$
 $+ \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} e^{-x} \right) - \frac{1}{x} \left(\frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} e^{-2x} \right).$
- 356) $b - a + a \ln \frac{a}{b}.$ Указание. Использовать равенство
 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x} + x(\alpha - \beta)e^{-\beta x}}{x^2} dx =$
 $= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x^2} dx + (\alpha - \beta) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x}}{x} dx$
и преобразовать $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x^2} dx$ интегрированием по частям.
- 357) 0. 358) $a \ln a.$
- 359) $a \ln a - a.$ Указание. Использовать равенство
 $ax \cos x - \sin ax = ax(\cos x - \cos ax) + ax \cos ax - \sin ax.$
- 360) $\ln \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{|\alpha - \beta|}}.$ 361) $\ln \frac{\sqrt{|a^2 - b^2|}}{b}.$ 362) $\ln \frac{\alpha}{\beta}.$ 363) $\alpha \beta \ln \frac{\beta}{\alpha}.$

- 364) $\alpha\beta \ln \frac{\beta}{\alpha}$. 365) $2b \ln \frac{2b}{a+b} + 2a \ln \frac{2a}{a+b}$.
- 366) Указание. Полагая $A_n = -A_1 - A_2 - \dots - A_{n-1}$, рассмотреть интегралы
- $$\int_0^{+\infty} \frac{A_i \cos \alpha_i x - A_i \cos \alpha_n x}{x} dx = -A_i \ln \frac{\alpha_i}{\alpha_n}.$$
- 367) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \ln \frac{\beta}{\alpha}$. Указание. Свести интеграл к интегралу Фруллани, заменив $\sin^2 x$ на
- $$\sin^2 x - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2n(2n-1) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}.$$
- 368) $\ln \frac{\beta}{\alpha}$.
- 369) $\left(1 - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right) \ln \frac{\beta}{\alpha}$. Указание. Свести интеграл к интегралу Фруллани, заменив $\cos^2 x$ на
- $$\cos^2 x - \frac{1}{2} \cdot \frac{2n(2n-1) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \dots n}.$$
- 370) $\frac{\pi}{2}$ при $\beta < \alpha$; $\frac{\pi}{4}$ при $\beta = \alpha$; 0 при $\beta > \alpha$.
- 371) $\frac{\pi}{4}$ при $\alpha < \beta + \gamma$; $\frac{\pi}{8}$ при $\alpha = \beta + \gamma$; 0 при $\alpha > \beta + \gamma$.
- 372) $\frac{\pi}{2}\beta$ при $\beta \leq \alpha$; $\frac{\pi}{2}\alpha$ при $\beta \geq \alpha$.
- 373) $\frac{\pi}{2}\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$. 374) $\frac{\pi}{2}|\alpha - \beta|$. 375) Равномерно.
- 376) Неравномерно. 377) Неравномерно. 378) Равномерно.
- 379) Равномерно. 380) Неравномерно. 381) Неравномерно.
- 382) Равномерно. 383) Равномерно. 384) Равномерно.
- 385) Неравномерно. 386) Равномерно.
- 387) а) Равномерно, б) равномерно. 388) Равномерно.
- 389) а) Равномерно, б) неравномерно.
- 390) а) Неравномерно, б) равномерно.
- 391) а) Неравномерно, б) равномерно.
- 392) а) Неравномерно, б) равномерно.
- 393) а) Неравномерно, б) неравномерно, в) неравномерно, г) равномерно, д) равномерно.
- 394) а) Неравномерно, б) равномерно.

- 395) а) Неравномерно, б) равномерно. 396) Да. 397) Нет.
 398) Нет. 399) Нет. 400) Да. 401) Да. 402) Да. 403) 9.
 404) $\frac{1}{4}$. 405) $\frac{\pi}{3}$. 406) $\frac{\pi}{2}$. 407) 1. 408) $f(x) - f(a)$. 409) $\frac{1}{2}$.
 410) 0. 411) $\ln \frac{2e}{1+e}$. 412) 0. 413) Непрерывна.
 414) Непрерывна. 415) Непрерывна. 416) Непрерывна.
 417) Непрерывна. 418) Непрерывна.
 419) Если $f(0) \neq 0$, то разрывна в точке $y = 0$; если $f(0) = 0$, то непрерывна при $|y| < \infty$.
 420) Разрывна в точке $y = 0$. 421) Непрерывна.
 422) Непрерывна. 423) Непрерывна. 424) Непрерывна.
 425) Нет. 426) Нет. 427) Нет. 428) Нет.
 429) $\int_a^b 2ye^{x^2+y^2} dx$. 430) $(y^2 + y)^{10} + \int_0^y x(x + xy)^9 dx$.
 431) $-|y| \sin y^2 + \int_y^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} \sin xy + x \sqrt{xy} \cos xy \right) dx$.
 432) $2ye^{-y^4} - e^{-y^2}$.
 433) $2ye^{-5} - e^{-y^3} - \int_y^{y^2} x^2 e^{-x^2 y} dx$.
 434) $\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y+b} \right) \sin y(y+b) - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{a+y} \right) \sin y(a+y)$.
 435) $-\cos(\sqrt{\cos y} \cdot y) \sin y - \cos(\sqrt{\sin y} \cdot y) \cos y -$
 $-\int_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{x} \sin(\sqrt{x} y) dx$.
 436) $\frac{2}{y} \ln(1 + y^2)$.
 437) $f(y, -y) + 2 \int_0^y f'_u(u, v) dx, u = x + y, v = x - y$.
 438) $-\frac{1}{y^2} \frac{\ln 2}{1+y} + \int_0^{1/y} \frac{1+y - (1+xy) \ln(1+xy)}{(1+y)^2(1+xy)} dx$.

- 439) $2y \int_{y^2-y}^{y^2+y} \sin(z^2 + y^4 - y^2) dz + 2 \int_0^{y^2} \sin 2z^2 \cos 2yz dz -$
 $- 2y \int_0^{y^2} dx \int_{x-y}^{x+y} \cos(x^2 + z^2 - y^2) dz.$
- 440) $-\int_y^{y^2} ((x+y)^2 + 2y(x+y)) \exp(-y(x+y)^2) dx +$
 $+ 2y \exp(-y^3(1+y)^2) - y \exp(-4y^3).$
- 441) $\frac{1}{y} f(1) \operatorname{sign}(\sin y) - \frac{1}{y} \int_0^1 f(x) \operatorname{sign}(\sin xy) dx -$
 $-\frac{1}{y} \int_0^1 x f'(x) \operatorname{sign}(\sin yx) dx, \quad y \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$
 если $f(1) = 0$, то $F'(y)$ существует всюду на $\mathbb{R}$.
- 442) $\int_0^{y^2} \exp(y^4 z^3) dz +$
 $+\int_0^{-y^2 y} \left\{ x^3 \int_{-yx}^{y+x} \exp(x^3 z^3 y) z^3 dz + x \exp(y^4 x^4) - x \exp(-y^4 x^4) \right\} dx.$
- 443) $3e^y + 2ye^y.$ 444) $3f(y) + 2yf'(y).$
- 445) $F''(y) = 2f(y), \quad y \in (a; b); \quad F''(y) = 0, \quad y \notin (a; b).$
 Если $f(a) = f(b) = 0$, то $F''(a) = F''(b) = 0$;
 если $f(x) \neq 0$ для $x = a$ и $x = b$, то существуют односторонние производные $F''_+(a) = 2f(a), \quad F''_+(b) = 0,$
 $F''_-(a) = 0, \quad F''_-(b) = 2f(b).$
- 446) $f(y).$ 447) $\frac{f(y+2\alpha) - 2f(y+\alpha) + f(y)}{\alpha^2}.$
- 448) $F''_{xy}(x, y) = x(2-3y^2)f(xy) + \frac{x}{y^2} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 y(1-y^2)f'(xy).$
- 453) $\pi \ln \frac{|a| + \sqrt{a^2 - 1}}{|a|}.$ 454) $\pi \ln \frac{m+1}{2}.$

- 455) $\pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}$. 456) $2\pi \ln |a|$, $|a| > 1$; 0 , $|a| \leq 1$.
- 457) $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} a \cdot \ln(1 + |a|)$. 458) $\pi \arcsin a$. 459) $\pi \arcsin a$.
- 460) π . 461) $\frac{\pi}{2} \left[\operatorname{arctg} a\sqrt{2} - \operatorname{arctg} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \right]$.
- 462) $\frac{\pi}{2}(1 - e^{|a|}) \operatorname{sign} a$. 463) $\frac{\pi}{2} \ln(a + \sqrt{1+a^2})$. 464) $\pi \arcsin a$.
- 465) $-\frac{\arccos^2 a}{2} + \frac{\pi^2}{8}$. 466) $\frac{\pi^2}{4} - \arccos^2 a$. 467) $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} a \cdot \ln(1+a^2)$.
- 468) $y = 4x - \frac{11}{3}$. 469) Нет. 470) Нет. 471) Нет. 472) Да.
- 473) Да. 474) Нет. 475) $\ln \frac{1+b}{1+a}$. 476) $\operatorname{arctg} \frac{b-a}{1+(a+1)(b+1)}$.
- 477) $\frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2}$. 478) $\pi \arcsin \frac{b}{a}$.
- 479) а) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$; б) $\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} a^{-2n}$. Указание. Доказать, что I удовлетворяет уравнению
- $$I''(a) + \frac{2n+1}{a} I(a) = 0.$$
- 484) а) Неравномерно, б) равномерно.
- 485) а) Равномерно, б) неравномерно. 486) Равномерно.
- 487) а) Равномерно, б) равномерно. 488) Равномерно.
- 489) Равномерно. 490) Неравномерно. 491) Неравномерно.
- 492) а) Равномерно, б) неравномерно. 493) Равномерно.
- 494) Равномерно. 495) Равномерно. 496) Равномерно.
- 497) а) Равномерно, б) равномерно, в) неравномерно,
- 498) Неравномерно. 499) а) Равномерно, б) неравномерно.
- 500) а) Равномерно, б) неравномерно.
- 501) а) Равномерно, б) неравномерно.
- 502) а) Равномерно, б) неравномерно.
- 503) а) Равномерно, б) неравномерно.
- 504) а) Равномерно, б) неравномерно.
- 505) а) Равномерно, б) неравномерно.
- 506) Неравномерно. 507) а) Равномерно, б) неравномерно.
- 508) Равномерно. 509) Равномерно.

- 510) а) Равномерно, б) равномерно, в) неравномерно.
511) а) Равномерно, б) неравномерно.
512) а) Равномерно, б) неравномерно.
513) а) Равномерно, б) неравномерно. 514) Неравномерно.
515) Равномерно. 516) Равномерно.
517) а) Неравномерно, б) равномерно. 518) Равномерно.
519) а) Равномерно, б) неравномерно.
520) а) Равномерно, б) неравномерно.
521) а) Равномерно, б) неравномерно.
522) а) Равномерно, б) неравномерно. 523) Равномерно.
524) а) Равномерно, б) неравномерно. 525) Равномерно.
526) а) Равномерно, б) неравномерно.
527) а) Равномерно, б) равномерно. 528) Равномерно.
529) а) Равномерно, б) неравномерно.
530) а) Равномерно, б) неравномерно.
531) а) Равномерно, б) неравномерно. 532) Равномерно.
533) Равномерно. 534) а) Равномерно, б) неравномерно.
535) Неравномерно. 536) а) Равномерно, б) неравномерно.
537) Равномерно. 538) а) Равномерно, б) неравномерно.
539) Равномерно. 540) Равномерно. 541) Равномерно.
542) а) Равномерно, б) неравномерно.
543) а) Неравномерно, б) равномерно. 544) Равномерно.
545) Равномерно. 546) Равномерно. 547) Равномерно.
548) Равномерно. 549) Равномерно. 550) Равномерно.
551) Равномерно. 552) Неравномерно. 553) Равномерно.
554) а) Неравномерно, б) неравномерно. 555) Равномерно.
556) Равномерно. 557) Равномерно. 558) Неравномерно.
559) Равномерно. 560) Равномерно.
561) а) Равномерно, б) неравномерно. 584) Непрерывна.
585) Непрерывна. 586) Непрерывна. 587) Непрерывна.
588) Непрерывна. 589) Непрерывна. 590) Непрерывна.
591) Непрерывна всюду, кроме $\alpha = 0$.
592) Непрерывна всюду, кроме $\alpha = 0$. 593) Непрерывна.
594) Непрерывна. 595) Непрерывна. 596) Непрерывна.
597) Непрерывна. 598) Непрерывна. 599) Непрерывна.
600) Непрерывна. 601) Непрерывна.
602) Непрерывна всюду, кроме $\alpha = \pm 1$. 603) Непрерывна.
604) Непрерывна. 605) Непрерывна всюду, кроме $\alpha = 0$.

606) Непрерывна всюду, кроме $\alpha = 0$. 607) Непрерывна.

$$608) F'_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x} dx. \quad 609) F'_\alpha = - \int_0^{+\infty} \frac{2(x+\alpha) \cos x}{(1+(x+\alpha)^2)^2} dx.$$

$$610) F'_\alpha = - \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin \alpha x dx.$$

$$611) \text{ а) } F'_\alpha = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx; \text{ б) } F'_\alpha = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx, \alpha \neq 0,$$

в нуле $F(\alpha)$ не имеет производной. Указание. Представив $F'(\alpha)$ для $\alpha \neq 0$ в виде $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)} dx - \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, найти $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} F'_\alpha$ и $\lim_{\alpha \rightarrow 0-} F'_\alpha$.

$$612) F'_\alpha(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$613) F'_\alpha = - \int_\alpha^{+\infty} x e^{-\alpha x} dx - e^{-\alpha^2} = -2e^{-\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha^2}. \text{ Указание.}$$

Для любого $\alpha > 0$ имеем $F(\alpha) = \int_\alpha^1 e^{-\alpha x} dx + \int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$.

Второй способ. Вычислив интеграл, найти явно функцию $F(\alpha)$ и продифференцировать ее.

$$614) F'_\alpha(\alpha) = - \int_\alpha^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx - e^{-\alpha^3}. \text{ См. указание к задаче 613.}$$

$$615) F'_\alpha(\alpha) = \int_\alpha^{+\infty} \frac{x \cos \alpha x}{1+x^3} dx - \frac{\sin \alpha^2}{1+\alpha^3}. \text{ См. указание к задаче 613.}$$

616) Равенство справедливо. $M = \mathbb{R}$.

617) Равенство справедливо. $M = \mathbb{R}$.

618) Равенство несправедливо. $M = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ или

$$\mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ Указание. } \int_0^{+\infty} f'_\alpha(x, \alpha) dx \text{ расходится.}$$

- 620) $\frac{2}{\alpha^3}$. 621) $\frac{(-1)^m \cdot m!}{n^{m+1}}$. 622) $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-(n+\frac{1}{2})}$.
- 623) а) $\frac{2n}{(n^2+1)^2}$; б) $\frac{n^2-1}{(n^2+1)^2}$; в) $\frac{2(3n^2-1)}{(n^2+1)^3}$; г) $\frac{2n(n^2-3)}{(n^2+1)^3}$;
 д) $\frac{24n(n^2-1)}{(n^2+1)^4}$; е) $\frac{6(n^4-5)}{(n^2+1)^4}$.
- 624) а) $\ln n$; б) $n \ln n - n$; в) $\frac{n^2}{2} \ln n - \frac{3}{4}n^2$.
- 625) а) $\ln n$; б) $n \ln n - n$; в) $\frac{n^2}{2} \ln n - \frac{3}{4}n^2$. 626) $\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \alpha$.
- 627) $\frac{\pi|\alpha|}{4}$. 628) $\frac{5\pi}{32}\alpha|\alpha|$. 629) $\frac{225}{128}\pi\alpha^3|\alpha|$. 630) $\frac{3}{8}\pi a|a|$.
- 631) $\frac{1}{3}\pi|a|^3$. 632) $\frac{\pi}{4}$. 633) $\frac{\beta\pi}{2}$ при $\alpha > \beta$; $\frac{\alpha\pi}{2}$ при $\alpha \leq \beta$.
- 634) 0 при $|\alpha| < |\beta|$; $\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \alpha$ при $|\alpha| = |\beta|$, $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha$ при $|\alpha| > |\beta|$.
- 635) $\frac{\pi}{2}\beta$ при $\alpha \geq \beta + \gamma$; $\frac{\pi}{4}(\alpha + \beta - \gamma)$ при $|\beta - \gamma| \leq \alpha \leq \beta + \gamma$;
 $\frac{\pi}{2}\alpha$ при $\beta > \gamma$, $\alpha \leq \beta - \gamma$; 0 при $\beta < \gamma$, $\alpha \leq \gamma - \beta$.
- 636) $\frac{1}{2}\pi\beta\gamma$ при $\alpha \geq \beta + \gamma$; $\frac{\pi}{8}(2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)$
 при $\alpha \leq \beta + \gamma$.
- 637) $\frac{\pi}{2}$ при $\alpha > \beta + \gamma$; $\frac{3\pi}{8}$ при $\alpha = \beta + \gamma$; $\frac{\pi}{4}$ при
 $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$; $\frac{\pi}{8}$ при $\alpha = |\beta - \gamma|$; 0 при $\alpha < |\beta - \gamma|$.
- 638) $\frac{\pi}{4}$ при $|\alpha| < 1$; $\frac{\pi}{8}$ при $|\alpha| = 1$, $-\frac{\pi}{8}$ при $1 < |\alpha| \leq 3$, 0 при
 $|\alpha| > 3$.
- 639) $\frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi\alpha|\alpha|}{8}$ при $|\alpha| < 2$; $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha$ при $|\alpha| \geq 2$.
- 640) $\frac{\pi}{4}(2 - |\alpha|)$ при $|\alpha| \leq 2$, 0 при $|\alpha| > 2$. 641) $\frac{\pi}{4}$. 642) $\frac{\pi}{4}$.
- 643) $\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$. 644) $\frac{(2n-1)!!}{\alpha^{2n+1} \cdot 2^{n+1}} \sqrt{\pi}$. 645) $\frac{n!}{2 \cdot \alpha^{2n+2}}$.
- 646) $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\alpha c - \beta^2}{\alpha}}$.
- 647) $\frac{(\alpha + 2\beta^2)\alpha_1 - 4\alpha\beta\beta_1 + 2\alpha^2 c_1}{2\alpha^2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\alpha c - \beta^2}{\alpha}}$.

- 648) $\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-2\alpha\beta}$ Указание. Представить $(0; +\infty)$ как $\left(0; \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) \cup \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}; +\infty\right)$, в интеграле по $\left(0; \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$ положить $x = \frac{\beta}{\alpha t}$.
- 649) $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$. 650) $\frac{\beta\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}$. 651) $\frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \frac{d^{2n}}{d\beta^{2n}}(e^{\beta^2})$.
- 652) $\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-1}} \frac{d^{2n-1}}{d\beta^{2n-1}}(e^{\beta^2})$. 653) $\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{\alpha}}$. 654) $\frac{\beta\sqrt{\pi}}{2\alpha\sqrt{\alpha}} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}}$.
- 655) $-\frac{\sqrt{\pi}}{4e}$. 656) $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{d^{2n}}{d\beta^{2n}}(e^{-\beta^2})$. 657) $\frac{\beta\sqrt{\pi}}{4\alpha\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$.
- 658) $(-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}} \frac{d^{2n-1}}{d\beta^{2n-1}}(e^{-\beta^2})$. 659) $\frac{\pi}{4} \frac{(1 - e^{-2\alpha})}{\alpha}$.
- 660) $\frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} \operatorname{sign} \alpha$. 661) $\frac{\pi}{2}(1 - e^{-\alpha})$. 662) $\frac{\pi}{4}(1 + |\alpha|)e^{-|\alpha|}$.
- 663) $\frac{\pi}{\sqrt{ac - b^2}} e^{-\frac{|\alpha|}{a}\sqrt{ac - b^2}} \cos \frac{\alpha b}{a}$. 664) $\frac{\pi}{2}(2e^{-\alpha} - 1)$.
- 665) $\frac{\pi\alpha}{4} e^{-\alpha}$.
- 666) $\sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin\left(\frac{ac - b^2}{a} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} a\right)$. Указание. Сделать замену $\sqrt{ax} + \frac{b}{\sqrt{a}} = t$, $a > 0$.
- 667) $\sqrt{\pi} \sin\left(a^2 + \frac{\pi}{4}\right)$. 668) $\sqrt{\pi} \cos\left(a^2 + \frac{\pi}{4}\right)$. 669) $\ln \frac{\alpha}{\beta}$.
- 670) $\frac{\pi}{2}\beta - \pi\sqrt{\alpha}$. 671) $\frac{1}{2} \ln(1 + n^2)$. 672) $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + m^2}{\alpha^2 + m^2}$.
- 673) $\operatorname{arctg} n$. 674) $\operatorname{arctg} \frac{m(\beta - \alpha)}{m^2 + \alpha\beta}$. 675) $(\beta - \alpha)\sqrt{\pi}$. 676) $\ln \frac{\beta}{\alpha}$.
- 677) $\frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$. 678) $\sqrt{\pi}(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})$. 679) $\ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha} \cdot (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha + \beta)^{2(\alpha + \beta)}}$.
- 680) $\frac{1}{2} \left[\operatorname{arctg} \frac{\beta + \gamma}{\alpha} + \operatorname{arctg} \frac{\beta - \gamma}{\alpha} \right]$. 681) $\operatorname{arctg} \frac{\alpha(\beta - \gamma)}{\alpha^2 + \beta\gamma}$.
- 682) $\frac{1}{2} \ln \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2}$. 683) $\ln(1 + \alpha)$. 684) $\frac{\pi}{2}(\beta - \alpha)$.

- 685) $-\sum_{i=1}^n A_i \ln \alpha_i$. 686) $\alpha - \beta + \beta \ln \frac{\beta}{\alpha}$. 687) $\ln \sqrt[4]{1 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2}}$.
- 688) $\beta \operatorname{arctg} \frac{2\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{4} \ln \left(1 + \frac{4\beta^2}{\alpha^2}\right)$.
- 689) $-\frac{\beta + \gamma}{2} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\pi\gamma}{2}$.
- 690) $\frac{1}{4} \left[\pi + \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{3\beta} - 3 \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} \right]$.
- 691) $\frac{3}{8} \beta \ln \frac{\alpha^2 + 9\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} + \frac{\alpha}{4} \left[\operatorname{arctg} \frac{3\beta}{\alpha} - 3 \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} \right]$.
- 692) $\pi(\sqrt{1 - \alpha^2} - 1)$. 693) $-(\arcsin \alpha)^2$. 694) $\pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}{2}$.
- 695) а) $\pi \ln \frac{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}{2}$, б) $\pi \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha^2 + 1}}{2}$.
- 696) $\frac{\pi}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)$. 697) $\frac{\pi}{\beta} \ln(1 + \alpha\beta)$. 698) $\frac{\pi}{\beta} \ln(\alpha + \beta)$.
- 699) $\frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha (1 + |\alpha| - \sqrt{1 + \alpha^2})$. 700) $\frac{\pi}{2} \ln \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)$.
- 701) $\frac{\pi}{2} [\alpha\beta + (\alpha^2 - \beta^2) \ln(\alpha + \beta) - \alpha^2 \ln \alpha + \beta^2 \ln \beta]$.
- 702) $\frac{2\pi}{3} [\alpha\beta(\alpha + \beta) - (\alpha^3 + \beta^3) \ln(\alpha + \beta) + \alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta]$.
- 703) $\frac{\pi}{2} \ln \frac{(\alpha + \beta)^{\alpha + \beta}}{\alpha^\alpha \beta^\beta}$. 704) $\frac{\pi}{a} (e^{-\alpha c} - e^{-\alpha b})$.
- 705) $\frac{\pi}{4} (2 - \alpha e^{-\alpha} - 2e^{-\alpha})$. 706) $\frac{\pi}{16} (\alpha^2 + 3\alpha + 3) e^{-\alpha}$.
- 707) $\beta \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{2} \ln \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2}$. 708) $2\alpha\sqrt{\pi} \left(1 - e^{-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}\right)$.
- 709) $\frac{\sqrt{\pi m}}{2\alpha\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{m}{4\alpha}}$. 710) $\frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$.
- 712) Указание. Рассмотреть
- $$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(at+bx+xt)} \sin x \, dx \, dt, \quad \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(at+bx+xt)} \cos x \, dx \, dt, \quad b > 0.$$
- 713) 1. 714) $p^2 + \frac{1}{2}$. 715) $e^{2\alpha p + \alpha^2}$. 716) $\frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \cos \alpha p$.
- 717) $\frac{1}{p}$, $p > 0$. 718) $\frac{1}{p - \alpha}$, $p > \alpha$. 719) $\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$, $p > 0$.

- 720) $\frac{p}{p^2 + \beta^2}, p > 0$. 721) $\frac{n!}{p^{n+1}}$. 722) $\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}, p > 0$.
 723) $\frac{1}{(p + \alpha)^2}, p > -\alpha$. 724) $\frac{\alpha\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}e^{-\frac{\alpha^2}{4p}}, p > 0$.
 725) $\ln\left(1 + \frac{1}{p}\right), p > -1$. 728) $\ln\left|\frac{b-c}{a-c}\right|$.
 729) $\frac{1}{2n}\left[\frac{1}{(a-c)^{2n}} - \frac{1}{(b-c)^{2n}}\right]$. 730) $\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{k}$.
 731) $\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1} - (1+t)^{\alpha-1}}{t} dt$. 732) $-\ln 2$. 733) 0. 734) 0.
 735) π . 736) 0. 737) 0. 738) 0. 739) Не существует.

§5. Теоретические задачи

Интегралы, независимые от параметра

1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(n), & x = n, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \leq \frac{1}{2}, x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [n + \delta_{n-1} - 1; n - \delta_n], \\ 0 \leq \delta_n \leq \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}, \\ \text{линейна на } [n - \delta_n; n] \text{ и } [n; n + \delta_n] \end{cases}$$

(см. рис. 2).

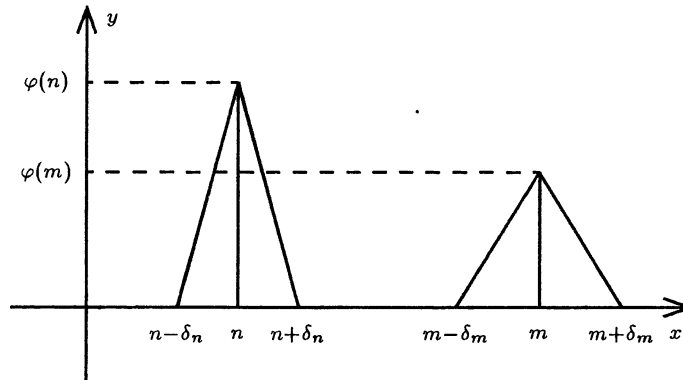


Рис. 2

При каких условиях на $\varphi(n)$ и δ_n справедливы утверждения:

а) функция f неограничена на $[0; +\infty)$, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx$$

абсолютно сходится;

- б) интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ расходится, а $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. Пусть 0 — единственная особая точка функции f на $(0; 1)$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} xf(x) > 0$. Доказать, что интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ расходится.
3. Пусть функция f монотонна на $(0; 1]$ и $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \infty$. Доказать, что из сходимости интеграла $\int_0^1 f(x) dx$ следует, что $\lim_{x \rightarrow 0+} xf(x) = 0$.
4. Привести пример непрерывной и неотрицательной на $(0; 1]$ функции $f \in \tilde{R}(0; 1)$, для которой $\lim_{x \rightarrow 0+} xf(x) > 0$.
5. Пусть функция f монотонна на $[a; +\infty)$, $a \geq 1$, и интеграл $\int_0^1 x^q f(x) dx$ сходится. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{q+1} f(x) = 0$.
6. Пусть функция f монотонна на $(0; 1)$ и интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ сходится. Доказать, что
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$
7. Пусть функция f монотонна на $(0; 1)$ и только один из концов этого интервала является особой точкой f . Доказать, что из существования $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$ следует сходимость интеграла $\int_0^1 f(x) dx$.
8. Показать, что функция $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ монотонна на $(0; 1)$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$, хотя интеграл

$\int_0^1 f(x) dx$ расходится.

9. Пусть функция f монотонна на $(0; 1)$ и интеграл

$\int_0^1 f(x) dx$ сходится. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

10. Пусть функция f монотонна на $[a; +\infty)$. Доказать, что

условие: “для любого h , $0 < h \leq 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(a + nh)$ сходится

и существует предел $\lim_{h \rightarrow 0+} h \sum_{n=1}^{\infty} f(a + nh) = A$ ” необходимо и

достаточно для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и при этом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = A.$$

11. Пусть ω — единственная особая точка функции f на $\langle a; \omega \rangle$ ($\langle \omega; a \rangle$). Доказать, что условие “для любой последовательности $\{x_n\}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \omega$

($a = x_0 > x_1 > x_2 > \dots > \omega$), $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt$

сходится” необходимо и достаточно для сходимости интегра-

ла $\int_a^{\omega} f(x) dx$ ($\int_{\omega}^a f(x) dx$).

12. Пусть $f(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin \frac{x}{n}$, $x \in [\pi n(n-1); \pi n(n+1)]$, $n \in \mathbb{N}$, (см. рис. 3).

Показать, что интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ расходится, а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\pi n(n-1)}^{\pi n(n+1)} f(x) dx$ — сходится.

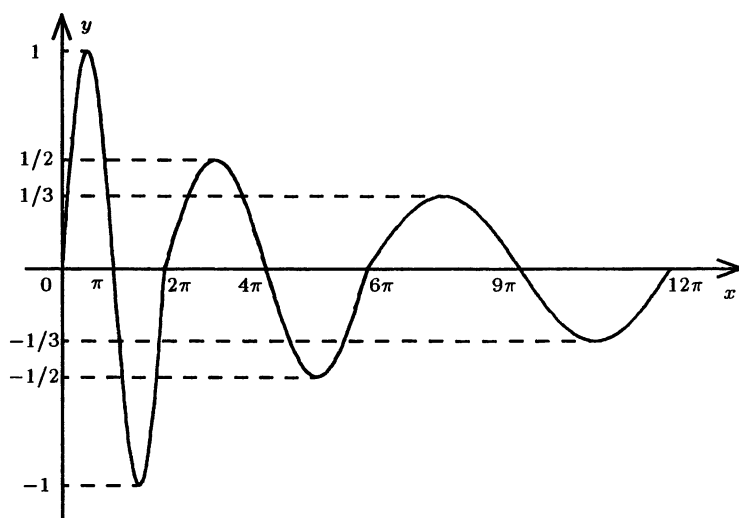


Рис. 3

13. Пусть функция $f(x)$ неотрицательна на $[a; \omega)$ и ω — единственная особая точка f на $\langle a; \omega \rangle$. Доказать, что, если найдется хотя бы одна последовательность, удовлетворяющая условиям

$$1) a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \omega;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega;$$

$$3) \text{ ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \text{ сходится,}$$

то интеграл $\int_a^{\omega} f(x) dx$ сходится.

14. Пусть ω — единственная особая точка функции f на $\langle a; \omega \rangle$ и последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условиям:

$$1) a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \omega;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega;$$

$$3) \text{ на отрезке } [x_{n-1}; x_n], n \in \mathbb{N}, \text{ функция } f \text{ не меняет знака;}$$

4) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx$ сходится.

Доказать, что интеграл $\int_a^{\omega} f(x) dx$ сходится.

15. Пусть $f \in \tilde{R}(a; b)$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция g_ε , удовлетворяющая условиям:

1) g_ε равна нулю в некоторой окрестности каждой особой точки функции f на $\langle a; b \rangle$;

2) $g_\varepsilon \in C(a; b)$;

3) $\left| \int_a^x (f(t) - g_\varepsilon(t)) dt \right| < \varepsilon$ для любого $x \in \langle a; b \rangle$.

16. Пусть $f \in \tilde{R}(a; b)$ и $|f| \in \tilde{R}(a; b)$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция g_ε , удовлетворяющая условиям:

1) g_ε равна нулю в некоторой окрестности каждой особой точки функции f на $\langle a; b \rangle$;

2) $g_\varepsilon \in C(a; b)$;

3) $\int_a^b |f(x) - g_\varepsilon(x)| dx < \varepsilon$.

17. Пусть $f \in \tilde{R}(a; b)$ и $|f| \in \tilde{R}(a; b)$. Доказать, что для любого промежутка $\langle \alpha; \beta \rangle$, $a < \alpha < \beta < b$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x+h) - f(x)| dx = 0$$

(интегральная непрерывность функции f).

18. Пусть $f \in \tilde{R}(a; +\infty)$ и $|f(x)| \in \tilde{R}(a; +\infty)$, $a > -\infty$.

Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0$.

19. Пусть 0 — единственная особая точка положительной функции f на $\langle 0; 1 \rangle$, $f \in \tilde{R}(0; 1)$ и $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$. Доказать,

что $\frac{f}{\sqrt{\Phi}} \in \tilde{R}(0; 1)$.

20. Пусть 0 — единственная особая точка положительной функции f на $\langle 0; 1 \rangle$, $\Phi(x) = \int_x^1 f(t) dt$ и интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ расходится. Доказать, что расходится интеграл $\int_0^1 \frac{f(x)}{\Phi(x)} dx$.

21. Привести пример двух функций f и g , для каждой из которых 0 — единственная особая точка на $\langle 0; 1 \rangle$, таких, что $f(x) \geq g(x)$, $x \in (0; 1]$, интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ сходится, а интеграл $\int_0^1 g(x) dx$ расходится.

22. Привести пример двух функций f и g , для каждой из которых 0 — единственная особая точка на $\langle 0; 1 \rangle$, таких, что $|f(x)| \geq |g(x)|$, $x \in (0; 1]$, интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ сходится, а интеграл $\int_0^1 g(x) dx$ расходится.

23. Доказать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} dx$ расходится, хотя $\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} \sim \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ при $x \rightarrow +\infty$, и интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ сходится.

24. Пусть $f \in \tilde{R}(0; +\infty)$ и $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$. Доказать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} dx$ сходится.

25. Пусть $a > 1$ и $f \in \tilde{R}(a; +\infty)$, $g \in \tilde{R}(a; +\infty)$, $f^2 \in \tilde{R}(a; +\infty)$, $g^2 \in \tilde{R}(a; +\infty)$. Доказать, что сходятся интегралы

$$1) \int_a^{+\infty} |fg| dx; \quad 2) \int_a^{+\infty} (f+g)^2 dx; \quad 3) \int_a^{+\infty} \frac{|f(x)|}{x} dx.$$

26. Пусть неотрицательная функция $f \in \tilde{R}(0; 1)$. Доказать, что $\int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt = o\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow 0+$.

27. Пусть неотрицательная функция $f \in C[\varepsilon; 1]$ для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, и $g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt$. Доказать, что, если $f \in \tilde{R}(0; 1)$, то $g \in \tilde{R}(0; 1)$ и $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

28. Пусть неотрицательная функция $f \in C[\varepsilon; 1]$ для любого ε , $0 < \varepsilon < 1$, $f \in \tilde{R}(0; 1)$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ и интеграл $\int_0^1 \frac{F(x)}{x} dx$ сходится. Доказать, что интеграл $\int_0^1 f(x) |\ln x| dx$ сходится и равен $\int_0^1 \frac{F(x)}{x} dx$.

Обозначим через $\tilde{R}^q(a; b)$ класс функций f , для которых интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится абсолютно и $|f|^q \in \tilde{R}(a; b)$.

29. Пусть $q > 1$ и функции $f \in \tilde{R}^q(a; b)$ и $g \in \tilde{R}^{\frac{q}{q-1}}(a; b)$ неотрицательны на $(a; b)$. Доказать, что $fg \in \tilde{R}(a; b)$ и справедливо неравенство Гельдера:

$$\int_a^b |f(x) \cdot g(x)| dx \leq \left\{ \int_a^b |f(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{ \int_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right\}^{\frac{q-1}{q}}.$$

30. Пусть неотрицательная на $(0; 1)$ функция f принадлежит классу $\tilde{R}^q(0; 1)$, $q > 1$. Доказать, что

$$\int_0^x f(t) dt = o(x^{\frac{q-1}{q}}), \quad x \rightarrow 0+.$$

31. Пусть неотрицательная на $\langle a; +\infty \rangle$ функция f принадлежит классу $\tilde{R}^q \langle a; +\infty \rangle$, $q > 1$. Доказать, что

$$\int_a^x f(t) dt = o(x^{\frac{q-1}{q}}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

32. Пусть 0 — единственная особая точка функции f на $\langle 0; 1 \rangle$ и интеграл $\int_0^1 x f^2(x) dx$ сходится. Доказать, что

$$\int_x^1 f(t) dt = o(\sqrt{|\ln x|}), \quad x \rightarrow 0+.$$

33. Пусть $f \in C[0; +\infty)$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ и интегралы $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ и $\int_0^{+\infty} x^2 F^2(x) dx$ сходятся. Доказать, что

$$\int_0^{+\infty} F^2(x) dx \leq 2 \left\{ \int_0^{+\infty} x^2 F^2(x) dx \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_0^{+\infty} f^2(x) dx \right\}^{1/2}.$$

34. Пусть $f \in C(-\infty; +\infty)$ и интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сходится. Доказать, что

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx.$$

35. Пусть $f \in C(0; +\infty)$ и интегралы $I_1 = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x}$ и $I_2 = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{\ln x dx}{x}$ сходятся. Доказать, что $I_2 = I_1 \cdot \ln a$.

36. Пусть $f \in C[0; +\infty)$ и интеграл $I = \int_0^{+\infty} f(x^2) dx$ сходится. Доказать, что $I = a \int_0^{+\infty} f \left[\left(ax - \frac{b}{x} \right)^2 \right] dx$, $a > 0$, $b > 0$.

37. Пусть $f \in C(0; +\infty)$ и интеграл $I = \int_0^{+\infty} f \left(ax + \frac{b}{x} \right) dx$, $a > 0$, $b > 0$, сходится. Доказать, что $I = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx$.

38. Пусть $f \in C(0; +\infty)$ и $g(x) = f(x^p + x^{-p}) \ln x$, $p > 0$. Доказать, что если интегралы $\int_0^{+\infty} \frac{g(x)}{x} dx$ и $\int_0^{+\infty} \frac{g(x)}{1+x^2} dx$ сходятся, то они равны нулю.

39. Пусть для функции $f \in C[0; +\infty)$ выполняется тождество $f(\pi-x) \equiv f(x) \equiv f(\pi+x)$ и интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{f(x) \sin x}{x} dx$ сходится. Пользуясь равенством

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{x + \pi n} + \frac{1}{x - \pi n} \right], \quad x \neq 0,$$

доказать, что $I = \int_0^{\pi/2} f(x) dx$ (формула Лобачевского).

40. Пусть $u_n \in R[a; b]$ при любом $n \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на $[a; b]$ к $S(x)$. Доказать, что если интеграл $\int_a^b g(x) dx$ сходится абсолютно, то

$$\int_a^b g(x) S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g(x) u_n(x) dx.$$

41. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi_n \in R[-A; A]$ при любом $A > 0$;

2) $\varphi_n \rightarrow 0$ на $\mathbb{R} \setminus (-\delta; \delta)$ при любом $\delta > 0$;

3) $\int_{-A}^A \varphi_n(x) dx \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$, при любом $A > 0$;

4) при любом $A > 0$ последовательность $\int_{-A}^A |\varphi_n(x)| dx$ ограничена.

Доказать, что если интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится абсолютно и $x_0 \in (a; b)$ — точка непрерывности f , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \varphi_n(t - x_0) dt = f(x_0).$$

42. Пусть

$$f(x) = \frac{1}{n}, \quad g(x) = \cos \frac{x}{n}, \quad x \in [\pi n(n-1); \pi n(n+1)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Показать, что хотя f монотонна на $[0; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,

но интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ расходится. Какое условие признака Дирихле нарушено?

43. Пусть $f(x) = \frac{\text{sign}(\cos x)}{\sqrt{x}}, x > 0$. Показать, что хотя $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ и функция $\Phi(x) = \int_1^x \cos t dt$ ограничена

на $[1; +\infty)$, но интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) \cos x dx$ расходится. Какое условие признака Дирихле нарушено?

44. Пусть функция f монотонна на $[a; +\infty)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x dx$ сходится. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

45. Пусть функция f монотонна на $[a; +\infty)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$ сходится абсолютно. Доказать, что $|f| \in \tilde{R}(a; +\infty)$.

46. Привести пример непрерывной, неотрицательной, неограниченной на $[0; +\infty)$ функции f , для которой интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) \sin x \, dx$ сходится абсолютно, а интеграл $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ расходится.

47. Пусть функция f монотонна на $[a; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; функция $g \in R[a; a+T]$, $T > 0$, и периодическая с периодом T . Доказать, что если $\int_a^{a+T} g(x) \, dx = 0$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) \, dx$ сходится, а если $\int_a^{a+T} g(x) \, dx \neq 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) \, dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ одновременно сходятся или расходятся.

48. Доказать, что если $f \in C^1[a; +\infty)$, f' монотонно возрастает на $[a; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, то интегралы

$$\int_a^{+\infty} \cos(f(x)) \, dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \sin(f(x)) \, dx$$

условно сходятся.

Интегралы, зависящие от параметра

49. Задана функция $f(x, y) = \begin{cases} xy, & 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, \\ 2x, & \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 1. \end{cases}$ Показать, что функция $f(x, y)$ разрывна на $[0; 1] \times [0; 1]$, а функ-

ция $F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ непрерывна на $[0; 1]$.

50. Пусть y_0 — предельная точка множества E ; $f(x, \bar{y}) \in R[a; b]$ при любом $\bar{y} \in E$; $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a; b]$ при $y \rightarrow y_0$, $g \in \tilde{R}(a; b)$ и $|g| \in \tilde{R}(a; b)$. Доказать, что $\varphi g \in \tilde{R}(a; b)$ и

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) g(x) dx = \int_a^b \varphi(x) g(x) dx.$$

51. Пусть y_0 — предельная точка множества E ; $f(x, y) \in R[a; b]$ при любом $b > a$ и любом $y \in E$; $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ при $y \rightarrow y_0$ на $[a; b]$ для любого $b > a$; $|f(x, y)| \leq F(x)$ при любом $y \in E$ и $F \in \tilde{R}(a; +\infty)$. Доказать, что

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

52. Пусть $f \in C([a; b] \times [c; d])$, $\varphi \in \tilde{R}(a; b)$, $|\varphi| \in \tilde{R}(a; b)$. Доказать, что функция $F(y) = \int_a^b \varphi(x) f(x, y) dx$ непрерывна на $[c; d]$.

53. Пусть $f \in C[0; 1]$. Доказать, что

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{y^2} e^{-\frac{x}{y^2}} f(x) dx = f(0),$$

т. е. равенство

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{1}{y^2} e^{-\frac{x}{y^2}} f(x) dx = \int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y^2} e^{-\frac{x}{y^2}} f(x) \right) dx$$

имеет место только тогда, когда $f(0) = 0$.

54. Пусть $b > 1$. Доказать, что

$$1) \lim_{a \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} e^{-ax^b} \cos x dx = 0; \quad 2) \lim_{a \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} e^{-ax^b} \sin x dx = 1$$

(сравните с задачей 50).

55. Пусть $f \in C([a; b] \times [c; d])$, $g \in \tilde{R}(a; b)$ и $|g| \in \tilde{R}(a; b)$. Доказать, что

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) g(x) dx = \int_a^b g(x) dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

56. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} y^2 x, & 0 \leq x \leq y^2, \\ x^2, & y^2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Показать, что функция f разрывна на $[0; 1] \times [0; 1]$; функция $F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ определена и непрерывна на $[0; 1]$; для любого $y \in [0; 1]$ функция $f(x, y)$ интегрируема на $[0; 1]$;

$$\int_0^1 F(y) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$$

57. Задана функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y-x}{(x+y)^3}, & y > 0, 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & y = 0, 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Показать, что функция $F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ определена и непрерывна на $[0; 1]$; для любого $x \in [0; 1]$ функция $f(x, y)$ интегрируема на $[0; 1]$, но $\int_0^1 F(y) dy \neq \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$.

58. Доказать, что

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^{(n)} = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x y^n \cos \left(y + \frac{\pi n}{2} \right) dy.$$

Пользуясь этой формулой, показать, что $\left| \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{(n)} \right| \leq \frac{1}{n+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

59. Пусть функции $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны на $[a; b] \times [c; d]$, $g \in \tilde{R}(a; b)$, $|g| \in \tilde{R}(a; b)$, $F(y) = \int_a^b g(x) f(x, y) dx$. Доказать, что $F \in C^1[a; b]$ и $F'(y) = \int_a^b g(x) f'_y(x, y) dx$.

60. Задана функция

$$f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2}, & x \neq 0, -1 \leq y \leq 1; \\ 0, & x = 0, -1 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Показать, что $f \in C([0; 1] \times [-1; 1])$; функция $f'_y(x, y)$ определена на $[0; 1] \times [-1; 1]$; для любого $y_0 \in [-1; 1]$ функция $f'_y(x, y_0)$

интегрируема на $[0; 1]$, а функция $F(y) = \int_0^1 f(x, y) dy$ определена и непрерывна на $[-1; 1]$, но не дифференцируема в нуле.

61. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на $[a; \omega] \times [c; d]$ и интеграл $\int_a^\omega f(x, y) dx$ сходится равномерно на $(c; d)$. Доказать, что этот интеграл равномерно сходится на $[c; d]$.

62. Пусть $f(x, y_0) \in R[a; b]$ для любого $y_0 \in M$ и любого b , $a < b < \omega$. Доказать, что из равномерной сходимости на M интеграла $\int_a^\omega |f(x, y)| dx$ следует равномерная сходимость на M интеграла $\int_a^\omega f(x, y) dx$.

63. Задана функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & y = 0, x \geq 0, \\ 1, & y > 0, 0 \leq x \leq \frac{1}{y}, \\ 0, & y > 0, x > \frac{1}{y}. \end{cases}$$

Показать, что интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{f(x, y) \sin x}{x} dx$ сходится равно-

мерно на $[0; 1]$, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{f(x, y) |\sin x|}{x} dx$ сходится неравномерно на $[0; 1]$.

64. Как показывает результат задачи 63, из условий

1) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на M ,

2) функция $g(x, y)$ ограничена на $[a; +\infty) \times M$

вообще говоря не следует, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y) dx$

равномерно сходится на M . Какие дополнительные условия достаточно наложить а) на функцию $f(x, y)$, б) на функцию $g(x, y)$, чтобы можно было гарантировать равномерную сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x, y) dx$ на M ?

65. Пусть $f \in R[0; a]$ для всех $a > 0$ и интеграл $\int_0^{+\infty} x^y f(x) dx$ сходится при $y = c$ и $y = d$, $c < d$. Доказать, что этот интеграл сходится равномерно на $[c; d]$.

66. Задана функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & y = 0, x \geq 2, \\ \frac{y \sin \pi x y}{\ln x}, & \frac{2}{y} < x < \frac{3}{y}, 0 < y \leq 1, \\ 0, & 0 < y \leq 1, 2 \leq x \leq \frac{2}{y} \text{ и } \frac{3}{y} \leq x. \end{cases}$$

Показать, что функция $f(x, y)$ неотрицательна на $[2; +\infty) \times [0; 1]$

и интеграл $\int_2^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$, хотя для любой функции $\varphi(x)$, $x \geq 2$, удовлетворяющей условию

$f(x, y) \leq \varphi(x)$, $x \in [2; +\infty)$, $y \in [0; 1]$, интеграл $\int_2^{+\infty} \varphi(x) dx$ расходится.

67. Задана функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & y = 0, x \geq 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < y \leq 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{y}, \\ 0, & 0 < y \leq 1, \frac{1}{y} < x. \end{cases}$$

Показать, что для любого $y_0 \in [0; 1]$ функция $f(x, y_0)$ локально монотонна в правой несобственной точке $+\infty$, $f(x, y) \rightarrow 0$ на $[0; 1]$ при $x \rightarrow +\infty$, а интеграл $\int_0^1 f(x, y) \sin x \, dx$ сходится неравномерно на $[0; 1]$.

68. Задана функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & y = 0, x \geq 0, \\ 1, & 0 < y \leq 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{y}, \\ \frac{1}{xy}, & 0 < y \leq 1, \frac{1}{y} < x. \end{cases}$$

Показать, что при любом $y_0 \in [0; 1]$ функция $f(x, y_0)$ монотонна на $[0; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y_0) = 0$, а интеграл $\int_0^{+\infty} f(x, y) \sin x \, dx$ сходится неравномерно на $[0; 1]$. Какое условие признака Дирихле нарушено?

69. Пусть интеграл $\int_0^{+\infty} f(x, y) \sin x \, dx$ сходится равномерно

на M и для любого $y_0 \in M$ функция $f(x, y_0)$ монотонна на $[0; +\infty)$ и стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Доказать, что $f(x, y)$ при $x \rightarrow +\infty$ сходится к нулю равномерно на M .

70. Пусть для любого $y_0 \in M$ единственной особой точкой функции $f(x, y_0)$ на $\langle a; \omega \rangle$ является точка ω . Доказать, что условие “для любой последовательности $\{x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega$,

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t, y) \, dt$ сходится равномерно на M ” необходимо

и достаточно для равномерной сходимости интеграла

$$\int_a^\omega f(x, y) dx \text{ на } M.$$

71. Показать, что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-xy} \cos x dx$ сходится равномерно на $(0; 1)$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} e^{-xy} \cos x dx$ сходится равномерно на $(0; 1)$.

72. Пусть для любого $y_0 \in M$ единственной особой точкой функции $f(x, y_0)$ на $\langle a; \omega \rangle$ является точка ω . Доказать, что если $f(x, y)$ неотрицательна на $\langle a; \omega \rangle \times M$ и хотя бы для одной последовательности $\{x_n\}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots <$

$< x_n < x_{n+1} < \dots < \omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t, y) dt$

сходится равномерно на M , то интеграл $\int_a^\omega f(x, y) dx$ сходится равномерно на M .

73. Пусть для любого $y_0 \in M$ единственной особой точкой функции $f(x, y_0)$ на $\langle a; \omega \rangle$ является точка ω и последовательность $\{x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega$, такова, что функция $f(x, y)$ не меняет знака на $[x_{n-1}, x_n] \times M$, $n \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t, y) dt$ сходится рав-

номерно на M . Доказать, что интеграл $\int_a^\omega f(x, y) dx$ сходится равномерно на M .

74. Обосновать возможность перестановки двух несобственных интегралов в интеграле

$$\int_0^{+\infty} \left(\sin ax \int_0^{+\infty} y^{m-1} e^{-xy} dy \right) dx, \quad 0 < m < 2, a > 0.$$

Ответы, решения, указания

1. а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n |\varphi(n)| < +\infty$;
 б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \varphi(n)$ расходится.

3. Указание. Рассмотреть $\int_{x/2}^x f(t) dt$, $0 < x < 1$.

4. Например,

$$f(x) = \begin{cases} 2^m \sin\left(\frac{\pi}{2}(2^{2m}x - 2^m + 1)\right), & x \in [2^{-m} - 4^{-m}; 2^{-m} + 4^{-m}], \\ & m \in \mathbb{N}, m > 1, \\ 0, & x \in \bigcup_{m=2}^{+\infty} [2^{-m} - 4^{-m}; 2^{-m} + 4^{-m}]. \end{cases}$$

5. Указание. Рассмотреть $\int_x^{2x} t^q f(t) dt$, если f не возрастает и $\int_{x/2}^x t^q f(t) dt$, если f не убывает.

6. Решение. Если функция f не убывает на $(0; 1)$ и интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ сходится, то $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx = \sum_{i=2}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x) dx$, откуда сле-

дует требуемое утверждение. Для невозрастающей функции доказательство аналогично.

7. Решение. Если функция f не убывает на $(0; 1)$ и ее особой точкой является 1, то сходимость интеграла $\int_0^1 f(x) dx$ и ограниченность последовательности $\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x) dx$ эквивалент-

ны. Таким образом, из неравенства

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

следует требуемое утверждение. Все остальные варианты доказываются аналогично.

8. Указание. Использовать равенство $f(x) = -f(1-x)$.

9. Решение. Если функция f не убывает на $(0; 1)$, то

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} f(x) dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\frac{2i-1}{2n}}^{\frac{2i+1}{2n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{2i+1}{2n}\right) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{2n}\right) \right) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\frac{2i-1}{2n}}^{\frac{2i+1}{2n}} f(x) dx + \frac{1}{n} f\left(\frac{2n-1}{2n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{2n}\right) = \\ &= \int_{\frac{1}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} f(x) dx + \frac{1}{n} f\left(1 - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{2n}\right) + \int_{\frac{1}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} f(x) dx &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{2i-1}{2n}\right) \leq \\ &\leq \int_{\frac{1}{2n}}^{1-\frac{1}{2n}} f(x) dx + \frac{1}{n} f\left(1 - \frac{1}{2n}\right). \end{aligned}$$

Используя результат задачи 3, имеем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0$.

Аналогично доказывается, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f\left(1 - \frac{1}{2n}\right) = 0$. Из по-

лученных соотношений следует требуемое утверждение. Для невозрастающей функции доказательство аналогично.

10. Решение. Из результата задачи 5 следует, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что функция f положительная и невозрастающая на $[a; +\infty)$. Тогда для $0 < h \leq 1$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \int_{a+h}^{a+(m+1)h} f(x) dx &= \sum_{n=1}^m \int_{a+nh}^{a+(n+1)h} f(x) dx \leq \\ &\leq h \sum_{n=1}^m f(a+nh) \leq \sum_{n=1}^m \int_{a+(n-1)h}^{a+nh} f(x) dx = \int_a^{a+mh} f(x) dx. \end{aligned}$$

В силу неотрицательности f отсюда следует эквивалентность сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(a+nh)$ и интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а также неравенство

$$\int_{a+h}^{+\infty} f(x) dx \leq h \sum_{n=1}^{\infty} f(a+nh) \leq \int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

из которого следует требуемое утверждение.

11. Решение. Необходимость. Пусть интеграл $\int_a^{\omega} f(x) dx$ сходится и $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условию. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу критерия Коши сходимости интеграла, существует число $B > a$, такое, что для любых b_1 и b_2 , $B < b_1 < b_2 < \omega$, имеем $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$. Так как $x_n \rightarrow \omega$, $n \rightarrow \infty$, то существует такое число $N \in \mathbb{N}$, что для любых $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ имеем $B < x_{m-1} < x_{m+p} < \omega$. Отсюда получаем, что

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt \right| = \left| \int_{x_{m-1}}^{x_{m+p}} f(t) dt \right| < \varepsilon$$

и, следовательно, в силу критерия Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt$ сходится.

Достаточность. Предположим, что интеграл $\int_a^{\omega} f(t) dt$ расходится. В силу критерия Коши сходимости интеграла существует такое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $B > a$ найдется пара чисел b_1 и b_2 , $B < b_1 < b_2 < \omega$, для которых $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(t) dt \right| \geq \varepsilon_0$. Пусть c_n — некоторая возрастающая последовательность, $c_0 = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \omega$. Пусть $B_1 = c_1$, найдем числа $b_1^{(1)}, b_2^{(1)}$, $B_1 < b_1^{(1)} < b_2^{(1)}$, для которых $\left| \int_{b_1^{(1)}}^{b_2^{(1)}} f(t) dt \right| > \varepsilon_0$,

и положим $x_1 = b_1^{(1)}, x_2 = b_2^{(1)}, x_0 = a$. Для $B_2 = \max(x_2, c_2)$ найдем соответствующие $b_2^{(1)}, b_2^{(2)}$ и положим $x_3 = b_2^{(1)}, x_4 = b_2^{(2)}$. Из построения видно, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \omega$ и $c_1 < x_1 < x_2 < \omega, c_2 < x_3 < x_4 < \omega$. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую условиям

- 1) $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n < x_{n+1} < \dots < \omega$,
- 2) $c_n < x_{2n-1} < x_{2n} < \omega, n \in \mathbb{N}$,
- 3) $\left| \int_{x_{2n-1}}^{x_{2n}} f(t) dt \right| > \varepsilon_0$.

Условие 2) показывает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega$, а условие 3) — что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt$ расходится, так как не выполнено необходимое условие сходимости.

Итак, предположив, что интеграл $\int_a^{\omega} f(x) dx$ расходится, мы построили такую последовательность $\{x_n\}$: $a = x_0 < x_1 <$

$< x_2 < \dots < x_n < \omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t) dt$ рас-
 ходится, что противоречит требованию сходимости такого
 ряда для любой последовательности $\{x_n\}$: $a < x_0 < x_1 < \dots <$
 $< x_n < \dots < \omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega$. Полученное противоречие
 показывает, что при выполнении этого требования интеграл
 $\int_a^{\omega} f(x) dx$ сходится.

13. Указание. Если $x_{n-1} < b_1 < b_2 < x_m$, то

$$0 \leq \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx \leq \sum_{i=n}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt.$$

14. Указание. Если $x_{n-1} < b_1 < b_2 < x_m$, то величи-
 на $\int_{b_1}^{b_2} f(x) dx$ заключена между наибольшей и наименьшей из
 величин $\sum_{i=n+1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt$, $\sum_{i=n+1}^{m-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt$, $\sum_{i=n}^{m-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt$,
 $\sum_{i=n}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt$.

15. Решение. Не ограничивая общности, можно считать,
 что единственной особой точкой функции f на $\langle a; b \rangle$ является
 точка a . Зададим число $\varepsilon > 0$. Найдем такое $h > a$, что
 $\left| \int_a^{\eta} f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}$ для всех η , $a < \eta \leq h$. Так как $f \in R[h; b]$, то
 найдется такое разбиение

$$T: \{h = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

для которого

$$0 \leq \underline{S}(f, T) - \int_h^b f(x) dx < \frac{\varepsilon}{4},$$

где $\underline{S}(f, T) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, — верхняя сумма Дарбу. Положим

$$\varphi_\varepsilon = \begin{cases} 0, & x \in (a; h], \\ M_i, & x \in (x_{i-1}; x_i), \quad 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Так как $\varphi_\varepsilon(x) - f(x) \geq 0$ и $x \in (h; b)$

$$0 \leq \int_h^x [\varphi_\varepsilon(t) - f(t)] dt \leq \underline{S}(f, T) - \int_h^b f(x) dx < \frac{\varepsilon}{4}, \quad x \in [h; b].$$

Пусть λ — диаметр разбиения T и $M = \sup_{x \in [h; b]} |f(x)|$.

Если $\delta = \min \left\{ \frac{\lambda}{4}, \frac{\varepsilon}{8Mn} \right\}$, то отрезки $[x_i - \delta; x_i + \delta]$, $[x_j - \delta; x_j + \delta]$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$, $i \neq j$, не пересекаются. Пусть

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon(x), & x \in \bigcup_{i=1}^{n-1} [x_i - \delta; x_i + \delta] \cup [h; h + \delta], \\ \text{линейна на } [h; h + \delta] \text{ и } [x_i - \delta; x_i + \delta], & 1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Функция g_ε отлична от функции φ_ε только на n отрезках $[h; h + \delta]$, $[x_i - \delta; x_i + \delta]$, $1 \leq i \leq n-1$, причем

$$|g_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)| \leq 2M, \quad x \in [h; b],$$

следовательно, $\int_h^x |g_\varepsilon(t) - \varphi_\varepsilon(t)| dt \leq n \cdot 2\delta \cdot 2M \leq \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $x \in [h; b]$.

Покажем, что функция g_ε удовлетворяет всем требованиям задачи. Условия а) и б) выполнены в силу определения g_ε .

Если $x \in (a; h]$, то $\left| \int_a^x (f(t) - g_\varepsilon(t)) dt \right| = \left| \int_a^x f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}$. Если $x \in [h; b]$, то

$$\int_a^x (f(t) - g_\varepsilon(t)) dt = \int_a^h f(t) dt + \int_h^x (f(t) - g_\varepsilon(t)) dt =$$

$$= \int_a^h f(t) dt + \int_h^x (f(t) - \varphi_\varepsilon(t)) dt + \int_h^x (\varphi_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(t)) dx.$$

Применяя полученные выше оценки, получаем, что

$$\left| \int_a^x (f(t) - g_\varepsilon(t)) dt \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, условие в) выполнено.

16. Указание. Если a — единственная особая точка f на $\langle a; b \rangle$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $h > a$, что

$$\int_a^\eta |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{4} \text{ для всех } \eta, a < \eta \leq h. \text{ Далее доказательство}$$

дословно повторяет решение задачи 15.

17. Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что единственной особой точкой функции f на $\langle a; b \rangle$ является точка a . Возьмем число $\varepsilon > 0$. Используя результат задачи 16, найдем непрерывную на $\langle a; b \rangle$ функцию g , равную нулю в некоторой окрестности точки a , для которой

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}. \text{ Если } c = \inf\{x, x \in \langle a; b \rangle, g(x) \neq 0\},$$

то $-\infty < c$ и $a < c$. Так как $a < \alpha < \beta < b$, то найдется такое $\eta > 0$, что $a < c - \eta$ и $a < \alpha - \eta < \beta + \eta < b$. Так как функция g непрерывна на $[c - \eta; b]$, то найдется такое $\lambda > 0$, что $|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b - c + \eta)}$ для любой пары x_1, x_2 ,

$x_1, x_2 \in [c - \eta, b], |x_1 - x_2| < \lambda$. Положим $\delta = \min \left[\frac{\eta}{2}; \lambda \right]$, тогда для любого $h, |h| < \delta$, имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_\alpha^\beta |f(x+h) - f(x)| dx &\leq \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)| dx + \\ &+ \int_\alpha^\beta |f(x+h) - g(x+h)| dx + \int_\alpha^\beta |g(x+h) - g(x)| dx \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 2 \int_a^b |f(x) - g(x)| dx + \int_{c-\eta}^{b-\eta} |g(x+h) - g(x)| dx < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (b-c) \frac{\varepsilon}{2[b-c+\eta]} < \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x+h) - f(x)| dx = 0$.

18. Указание. Сделать в интеграле $\int_a^{+\infty} f(x) \sin nx dx$ замену $x = t - \frac{\pi}{n}$ и воспользоваться свойством интегральной непрерывности (см. задачу 17).

19. Решение. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое $h > 0$, что $0 < \int_0^{\eta} f(x) dx = \Phi(\eta) < \frac{4\varepsilon^2}{25}$ для любого η , $0 < \eta < h$.

Пусть $0 < b_1 < b_2 < h$. Так как $f \in R[b_1; b_2]$, то найдется такое разбиение $T: \{b_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b_2\}$, что

$$0 \leq S(f, T) - \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx < \frac{\Phi(b_1)}{4},$$

где $S(f, T) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$, — верхняя сумма Дарбу функции f . Положим

$$g(x) = \begin{cases} M_1, & x \in [b_1; x_1], \\ M_i, & x \in (x_{i-1}; x_i], \quad 2 \leq i \leq n, \end{cases}$$

тогда $\int_{b_1}^{b_2} g(x) dx = S(f, T)$. Так как $g(x) \geq f(x)$, $x \in [b_1; b_2]$, то отсюда получаем, что

$$0 \leq \int_{b_1}^x (g(t) - f(t)) dt \leq \int_{b_1}^{b_2} g(t) dt - \int_{b_1}^{b_2} f(t) dt < \frac{\Phi(b_1)}{4}$$

для всех $x \in [b_1; b_2]$. Так как функция g на $[b_1; b_2]$ имеет только конечное число точек разрыва, то функция

$$G(x) = \Phi(b_1) - \int_{b_1}^x g(t) dt$$

является первообразной для g на $[b_1; b_2]$. В силу монотонности функции Φ отсюда получаем, что

$$0 \leq G(x) - \Phi(x) = \int_{b_1}^x (g(t) - f(t)) dx < \frac{\Phi(b_1)}{4} < \frac{\Phi(x)}{4},$$

$$x \in [b_1; b_2],$$

и, следовательно, $0 < G(x) < \frac{5}{4}\Phi(x)$, $x \in [b_1; b_2]$. Из всех полученных соотношений имеем, что

$$\int_{b_1}^{b_2} \frac{f(x)}{\sqrt{\Phi(x)}} dx < \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{f(x)}{\sqrt{G(x)}} dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \int_{b_1}^{b_2} \frac{g(x)}{\sqrt{G(x)}} dx =$$

$$= \sqrt{5}(\sqrt{G(b_2)} - \sqrt{G(b_1)}) < \frac{5}{2}\sqrt{\Phi(b_2)} < \varepsilon.$$

Отсюда в силу критерия Коши следует сходимость интеграла

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{\Phi(x)}} dx.$$

20. Указание. Рассмотреть поведение интеграла $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x) dx}{\Phi(x)}$ при фиксированном β , $0 < \alpha < \beta < 1$, и $\alpha \rightarrow 0+$.

21. Например, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; 1]$, $g(x) = -\frac{1}{x}$, $x \in (0; 1]$.

22. Например, $f(x) = (-1)^n(n+1)$, $x \in \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

23. Указание.

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x} - \sin x} = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{2x} + \frac{\sin^3 x}{x(\sqrt{x} - \sin x)}.$$

24. Решение. Так как $\Phi \in C[0; +\infty)$, то для любого отрезка $[a; b] \subset (0; +\infty)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} dx &= \int_{a/2}^{b/2} \frac{\Phi(t)}{t} dt - \int_a^b \frac{\Phi(x)}{x} dx = \\ &= \int_{a/2}^a \frac{\Phi(x)}{x} dx - \int_{b/2}^b \frac{\Phi(x)}{x} dx = \ln 2 \cdot [\Phi(\xi_1) - \Phi(\xi_2)], \end{aligned}$$

где $\xi_1 \in \left(\frac{a}{2}; a\right)$, $\xi_2 \in \left(\frac{b}{2}; b\right)$. Так как $\Phi(x)$ имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое C , что $|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| < \frac{\varepsilon}{\ln 2}$ для всех $x_1, x_2, x_1 > C, x_2 > C$; следовательно, если $a > 2C$ и $b > 2C$, то $\left| \int_a^b \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} dx \right| < \varepsilon$.

В силу критерия Коши отсюда следует сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} dx$. Сходимость интеграла $\int_0^1 \frac{\Phi(2x) - \Phi(x)}{x} dx$ доказывается точно так же.

25. 1) Следует из неравенства $|fg| \leq \frac{f^2 + g^2}{2}$;

2) Следует из неравенства $(f + g)^2 \leq 2(f^2 + g^2)$;

3) Следует из 1).

26. Решение. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое h , $0 < h < 1$, что $0 \leq \int_0^\eta f(x) dx < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех $\eta, 0 < \eta \leq h$. Если

$$0 < x < \min\left(h, \frac{\varepsilon}{2 \int_h^1 f(t) dt}\right), \text{ то}$$

$$0 \leq x \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt = x \int_x^h \frac{f(t)}{t} dt + x \int_h^1 \frac{f(t)}{t} dt < \int_x^h f(t) dt + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0+} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt = 0$.

27. Указание. Применить к интегралу $\int_{\varepsilon}^1 g(x) dx$, $0 < \varepsilon < 1$, формулу интегрирования по частям и использовать результат задачи 26.

28. Решение. Равенство

$$\int_{\alpha}^1 \frac{F(x)}{x} dx = F(\alpha) |\ln \alpha| + \int_{\alpha}^1 f(x) |\ln x| dx, \quad 0 < \alpha < 1,$$

показывает, что требуемое утверждение эквивалентно выполнению условия $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} F(\alpha) |\ln \alpha| = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$

в силу сходимости интеграла $\int_0^1 \frac{F(x)}{x} dx$ найдется такое h ,

$0 < h < 1$, что $0 \leq \int_{\eta}^h \frac{F(x)}{x} dx < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех η , $0 < \eta < h$, а в си-

лу непрерывности F на $[0; 1]$ найдется такое δ , $0 < \delta < 1$, что $F(x) |\ln h| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех x , $0 < x < \delta$. Если $0 < \alpha < \alpha_0 = \min(h, \delta)$, то в силу монотонности F на $[0; 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{2} &> \int_{\alpha}^h \frac{F(x)}{x} dx \geq F(\alpha) (\ln h - \ln \alpha) = \\ &= F(\alpha) |\ln \alpha| - F(\alpha) |\ln h| \geq F(\alpha) |\ln \alpha| - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $0 \leq F(\alpha) |\ln \alpha| < \varepsilon$ для всех α , $0 < \alpha < \alpha_0$, т. е. $\lim_{\alpha \rightarrow 0+} F(\alpha) |\ln \alpha| = 0$.

29. Решение. Покажем сначала, что если $p > 1$ и $q = \frac{p}{p-1}$,

то для любых $a > 0$, $b > 0$ имеем неравенство $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Действительно, функции $v = u^{p-1}$ и $u = v^{q-1}$ взаимно обратны; площадь фигуры, ограниченной осью Ou , кривой $v = u^{p-1}$ и прямой $u = a$, равна $\frac{a^p}{p}$, площадь фигуры, ограниченной

осью Ov , кривой $u = v^{q-1}$ и прямой $v = b$, равна $\frac{b^q}{q}$, сумма этих площадей не меньше площади прямоугольника $[0; a] \times [0; b]$ (см. рис. 4).

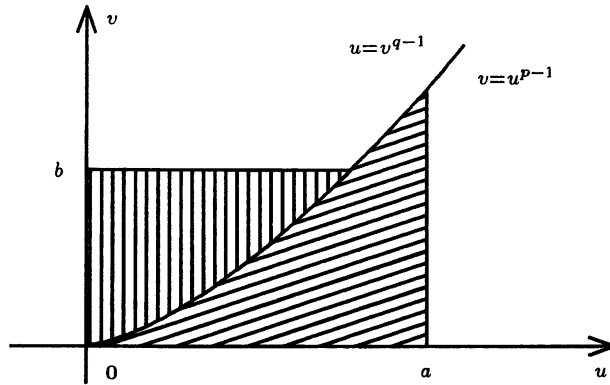


Рис. 4

Положим $a = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{1/q}}$, $b = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx\right)^{(q-1)/q}}$.

Из неравенства $ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{\frac{q}{q-1}}}{q}(q-1)$ получаем, что

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x)| &= ab \left\{ \int_a^b |f(x)|^q dx \right\}^{1/q} \cdot \left\{ \int_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right\}^{\frac{q-1}{q}} \leq \\ &\leq \frac{1}{q} \left(\frac{|f(x)|^q}{\int_a^b |f(x)|^q dx} + (q-1) \frac{|g(x)|^{\frac{q}{q-1}}}{\int_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx} \right) \times \\ &\times \left\{ \int_a^b |f(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{ \int_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right\}^{\frac{q-1}{q}}. \end{aligned}$$

Это неравенство показывает, что $|f(x)g(x)| \in \tilde{R}(a; b)$. Интегрируя по промежутку $\langle a; b \rangle$, получаем:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)g(x)| dx &\leq \frac{1}{q} \left(\frac{\int_a^b |f(x)|^q dx}{\int_a^b |f(x)|^q dx} + (q-1) \frac{\int_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx}{\int_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx} \right) \times \\ &\times \left\{ \int_a^b |f(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{ \int_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right\}^{\frac{q-1}{q}} = \\ &= \left\{ \int_a^b |f(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{ \int_a^b |g(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right\}^{\frac{q-1}{q}}. \end{aligned}$$

30. Решение. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое h , $0 < h < 1$, что $\int_0^\eta |f(x)|^q dx < \varepsilon^q$ для всех η , $0 < \eta < h$. Если $0 < x < h$, то применяя неравенство Гельдера (см. задачу 29), получаем, что $\int_0^x 1 \cdot f(t) dt \leq \left\{ \int_0^x |f(x)|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot x^{\frac{q-1}{q}} < \varepsilon \cdot x^{\frac{q-1}{q}}$.

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\frac{q-1}{q}} \cdot \int_0^x f(t) dt = 0$.

31. Указание. Провести рассуждение, аналогичное решению задачи 30.

32. Решение. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое h , $0 < h < 1$, что $\int_0^\eta x f^2(x) dx < \varepsilon^2$ для всех η , $0 < \eta \leq h$. Если $0 < x < h$, то, применяя неравенство Гельдера (см. задачу 29), получаем неравенство

$$\left| \int_x^1 f(t) dt \right| \leq \left| \int_h^1 f(t) dt \right| + \int_x^h \frac{|f(t)|}{\sqrt{t}} \sqrt{t} dt \leq$$

$$\leq K + \left\{ \int_x^h t f^2(t) dt \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \int_x^h \frac{dt}{t} \right\}^{1/2} \leq K + \varepsilon \cdot \sqrt{|\ln x|}.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \int_x^1 f(t) dt = 0$.

33. Решение. Так как $F(x) \in C[0; +\infty)$, то из неравенства $0 \leq F^2(x) \leq \frac{x^2 \cdot F^2(x)}{x^2}$, $x \geq 1$, следует сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} F^2(x) dx$. Отсюда следует, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} x F^2(x) = 0$ (сравните с задачей 2). Обозначим через $\{a_k\}$ такую монотонно возрастающую неограниченную последовательность, что $a_k \cdot F^2(a_k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Из равенства

$$\int_0^{a_k} F^2(x) dx = x F^2(x) \Big|_0^{a_k} - 2 \int_0^{a_k} F(x) f(x) x dx$$

получаем, что

$$0 \leq \int_0^{a_k} F^2(x) dx \leq a_k F^2(a_k) + 2 \int_0^{a_k} F(x) |f(x)| x dx.$$

Применяя неравенство Гельдера (см. задачу 29), получаем отсюда, что

$$\int_0^{a_k} F^2(x) dx \leq a_k F^2(a_k) + 2 \left\{ \int_0^{a_k} x^2 F^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_0^{a_k} f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

и, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем требуемое неравенство.

34. Указание. Представить $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$ в виде

$$\int_{-\infty}^0 f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx + \int_0^{+\infty} f\left(x - \frac{1}{x}\right) dx$$

и в первом слагаемом сделать замену $x = -\frac{1}{t}$.

35. Указание. В обоих интегралах сделать замену $x = ae^t$.

36. Решение. Так как функция $f(x^2)$ четная, то

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2) dx.$$

Сделав в этом интеграле замену $x = at - \frac{b}{t}$, получаем

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f\left(at - \frac{b}{t}\right)^2 \left(a + \frac{b}{t^2}\right) dt = \\ &= \frac{1}{2}a \int_0^{+\infty} f\left(\left(at - \frac{b}{t}\right)^2\right) dt + \frac{1}{2}b \int_0^{+\infty} f\left(\left(at - \frac{b}{t}\right)^2\right) \frac{dt}{t^2}. \end{aligned}$$

Сделав во втором интеграле замену $t = -\frac{b}{au}$, получим

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}a \int_0^{+\infty} f\left(\left(at - \frac{b}{t}\right)^2\right) dt + \frac{1}{2}a \int_{-\infty}^0 f\left(\left(au - \frac{b}{u}\right)^2\right) du = \\ &= \frac{1}{2}a \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2\right) dx \end{aligned}$$

и в силу четности подынтегральной функции имеем требуемое равенство $I = a \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2\right) dx$.

37. Указание. Представить I в виде $\int_0^{x_0} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx + \int_{x_0}^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx$, где x_0 — точка минимума функции $ax + \frac{b}{x}$, и в каждом из слагаемых сделать замену $ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2 + 4ab}$.

38. Указание. Представить луч $(0; +\infty)$ в виде $(0; 1) \cup [1; +\infty)$ и в интеграле по промежутку $(0; 1)$ сделать замену $t = \frac{1}{x}$.

39. Решение. Представим интеграл I в виде

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi/2} \frac{f(x) \sin x}{x} dx + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\frac{\pi}{2}(2n-1)}^{\pi n} \frac{f(x) \sin x}{x} dx + \int_{\pi n}^{\frac{\pi}{2}(2n+1)} \frac{f(x) \sin x}{x} dx \right) = \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{f(x) \sin x}{x} dx + \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (-1)^n \left[\frac{1}{x + \pi n} + \frac{1}{x - \pi n} \right] f(x) \sin x dx.
 \end{aligned}$$

Так как функция $f(x) \sin x$ ограничена на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{x + \pi n} + \frac{1}{x - \pi n} \right] f(x) \sin x$$

сходится равномерно на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} (-1)^n \left[\frac{1}{x + \pi n} + \frac{1}{x - \pi n} \right] f(x) \sin x dx &= \\
 = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x + \pi n} + \frac{1}{x - \pi n} \right) f(x) \sin x dx,
 \end{aligned}$$

и в силу равенства

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{x + \pi n} + \frac{1}{x - \pi n} \right], \quad x \neq 0,$$

получаем

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(f(x) \sin x \left[\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{x + \pi n} + \frac{1}{x - \pi n} \right] \right] \right) dx = \int_0^{\pi/2} f(x) dx.$$

40. Указание. Показать, что $S(x) \in R[a; b]$ и $g \cdot S \in \tilde{R}(a; b)$, затем оценить $\left| \int_a^b g(x)S(x) dx - \sum_{i=1}^n \int_a^b g(x)u_i(x) dx \right|$.

41. Решение. Пусть $A > 0$ и $[-A; A] \subset (a - x_0; b - x_0)$. В силу условия 1) несобственный интеграл $\int_a^b f(t)\varphi_n(t - x_0) dt$ определен для любого $x_0 \in (a; b)$ и равен $\int_{a-x_0}^{b-x_0} f(t+x_0)\varphi_n(t) dt$.

В силу абсолютной сходимости интеграла $\int_a^b f(x) dx$ и условия 2) имеем

$$\left| \int_{a-x_0}^{-A} f(t+x_0)\varphi_n(t) dt \right| \leq \sup_{t \in [a-x_0, -A]} |\varphi_n(t)| \int_a^b |f(t)| dx = o(1),$$

$$n \rightarrow \infty,$$

$$\int_A^{b-x_0} f(t+x_0)\varphi_n(t) dt = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(t+x_0)\varphi_n(t) dt = f(x_0).$$

Из условия 3) получаем, что $\int_{-A}^A \varphi_n(t) dt = 1 + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \int_{-A}^A f(t+x_0)\varphi_n(t) dt - f(x_0) = \\ &= \int_{-A}^A (f(t+x_0) - f(x_0))\varphi_n(t) dt - \varepsilon_n \cdot f(x_0). \end{aligned}$$

Возьмем число $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности f в точке x_0 найдется такое δ , $0 < \delta < A$, что $|f(t + x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4M}$ для всех t , $|t| \leq \delta$, где $M = \sup_n \int_{-A}^A |\varphi_n(x)| dx$ (см. условие 4)).

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-A}^A (f(t + x_0) - f(x_0)) \varphi_n(t) dt \right| &\leq \\ &\leq \left| \int_{-A}^{-\delta} (f(t + x_0) - f(x_0)) \varphi_n(t) dt \right| + \\ &+ \left| \int_{\delta}^A (f(t + x_0) - f(x_0)) \varphi_n(t) dt \right| + \\ &+ \int_{-\delta}^{\delta} |f(t + x_0) - f(x_0)| \varphi_n(t) dt \leq \\ &\leq 4 \sup_{[-A, A] \setminus [-\delta; \delta]} |\varphi_n(t)| \int_a^b |f(x)| dx + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

В силу условия 2) и условия $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что $|\varepsilon_n f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{4}$, $n > N$, и

$$\sup_{[-A, A] \setminus [-\delta; \delta]} |\varphi_n(t)| < \frac{\varepsilon}{8 \int_a^b |f(x)| dx}, \quad n > N.$$

Для $n > N$ получаем окончательно

$$\left| \int_{-A}^A f(t + x_0) \varphi_n(t) dt - f(x_0) \right| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

чем и завершается доказательство.

■

42. Не выполнено требование ограниченности функции

$$G(x) = \int_0^x g(t) dt. \text{ Указание. Рассмотреть } \int_{\pi n(n-1)}^{\pi n(n+1)} f(x)g(x) dx$$

$$\text{и } \int_{\pi n(n-1)}^{\pi n(n+1)} g(x) dx.$$

43. Не выполнено требование монотонности f . Указание.

$$\text{Рассмотреть } \int_{\pi n - \frac{\pi}{2}}^{\pi n + \frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx, n \in \mathbb{N}, \text{ и использовать резуль-}$$

тат задачи 11.

44. Решение. В силу монотонности f , не ограничивая общности, можно считать, что $f(x) \geq 0, x \geq a$. Если не выполнено условие $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, то найдутся такие числа $c > 0$ и $C > a$, что $f(x) > c, x \geq C$. Если $2\pi k > C$, то

$$\int_{2k\pi}^{2k\pi + \pi} f(x) \sin x dx > 2c. \text{ Отсюда в силу критерия Коши следу-}$$

ет расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) \sin x dx$. Полученное про-

тиворечие показывает, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

45. Решение. Из результата задачи 44 следует, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $f(x) > 0, x \geq a$. Так как в силу признака Дирихле

интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) \cos 2x dx$ сходится, то соотношение $f(x) \geq$

$$\geq |f(x) \sin x| \geq f(x) \sin^2 x = \frac{f(x)}{2} - \frac{f(x) \cos 2x}{2} \text{ показывает,}$$

что интегралы $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} |f(x) \sin x| dx$

одновременно сходятся или расходятся.

46. Например,

$$f(x) = \begin{cases} n, & x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0, & x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(2\pi n - \frac{1}{n^2}; 2\pi n + \frac{1}{n^2}\right), \\ \text{линейна на отрезках } \left[2\pi n - \frac{1}{n^2}; 2\pi n\right], \\ \quad \left[2\pi n; 2\pi n + \frac{1}{n^2}\right], \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

47. Решение. Если $\int_a^{a+T} g(x) dx = 0$, то функция $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ ограничена на $[a; +\infty)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ сходится в силу признака Дирихле. Если $\int_a^{a+T} g(x) dx = A \neq 0$, то равенство

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx = \frac{A}{T} \int_a^{+\infty} f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) \left[g(x) - \frac{A}{T}\right] dx$$

показывает, что интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ одновременно сходятся или расходятся.

48. Решение. Из условия следует существование такого $x_0 > a$, что функция f строго возрастает на $[x_0; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Пусть $x(t)$ — функция, обратная к f на $[f(x_0); +\infty)$, тогда $x(t)$ монотонно возрастает на $[f(x_0); +\infty)$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$ и x'_t монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ на $[f(x_0); +\infty)$. Делая замену $x = x(t)$, получаем, что

$$\int_a^{+\infty} \cos(f(x)) dx = \int_a^{x_0} \cos(f(x)) dx + \int_{f(x_0)}^{+\infty} (\cos t) x'_t dt$$

и

$$\int_a^{+\infty} \sin(f(x)) dx = \int_a^{x_0} \sin(f(x)) dx + \int_{f(x_0)}^{+\infty} (\sin t) x'_t dt,$$

откуда в силу признака Дирихле следует сходимость этих интегралов. Так как

$$\int_{f(x_0)}^{+\infty} x'_t dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) - x_0 = +\infty,$$

то, применяя результат задачи 45, получаем, что

$$\int_a^{+\infty} |\cos(f(x))| dx = +\infty \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} |\sin(f(x))| dx = +\infty.$$

50. Указание. Показать, что выполнены все условия теоремы о переходе к пределу под знаком несобственного интеграла.

51. Указание. Проверить, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно.

52. Следует из результата задачи 50.

53. Указание. Доказательство данного равенства аналогично доказательству в решении задачи 41.

54. Решение. Пункт 1. Интегрируя по частям, получаем, что

$$I_a = \int_0^{+\infty} e^{-ax^b} \cos x dx = e^{-ax^b} \sin x \Big|_0^{+\infty} + b \int_0^{+\infty} ax^{b-1} e^{-ax^b} \sin x dx.$$

Функция $f(x) = ax^{b-1} e^{-ax^b}$ неотрицательна на положительной полуоси, и для любого $a > 0$ существует такое $x_a > 0$, что f монотонно возрастает на $[0; x_a]$ и монотонно убывает на $[x_a; +\infty)$. В силу второй теоремы о среднем

$$\int_0^{x_a} ax^{b-1} e^{-ax^b} \sin x dx = \int_0^{x_a} f(x) \sin x dx = f(x_a) \int_{\xi_1}^{x_a} \sin x dx, \\ \xi_1 \in (0; x_a)$$

и

$$\int_{x_a}^{+\infty} ax^{b-1} e^{-ax^b} \sin x \, dx = \int_{x_a}^{+\infty} f(x) \sin x \, dx = f(x_a) \int_{x_a}^{\xi_2} \sin x \, dx, \\ \xi_2 \in (x_a; +\infty).$$

Отсюда получаем, что

$$|I_a| = \left| b \int_0^{x_a} f(x) \sin x \, dx + b \int_{x_a}^{+\infty} f(x) \sin x \, dx \right| = \\ = bf(x_a) \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin x \, dx \right| \leq 2bf(x_a) = \\ = 2ba^{\frac{1}{b}} (a^{\frac{1}{b}} x_a)^{b-1} e^{-(a^{\frac{1}{b}} x_a)} \leq 2ba^{\frac{1}{b}} K,$$

где постоянная $K = \max_{t>0} t^{b-1} e^{-t}$ не зависит от a . Полученное неравенство показывает, что $\lim_{a \rightarrow \theta+} I_a = 0$. Решение в пункте 2 проводится точно так же.

55. Указание. Показать, что интеграл $\int_a^b f(x, y)g(x) \, dx$ сходится равномерно.

58. Указание. Применить метод математической индукции.

59. Указание. Показать, что выполнены все условия теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.

61. Указание. Написать условие критерия Коши равномерной сходимости интеграла на $(c; d)$ и перейти к пределу при $y \rightarrow c+$ и $y \rightarrow d-$.

63. Решение. Возьмем число $\varepsilon > 0$. Так как интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ сходится, то найдется такое число $B > 1$, что для любой пары чисел $b_1, b_2, B < b_1 < b_2$, имеем $\left| \int_{b_1}^{b_2} \frac{\sin x}{x} \, dx \right| < \varepsilon$.

Если $1 \geq y \geq \frac{1}{B}$ или $y = 0$, то для любой такой пары

$$\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \frac{\sin x}{x} dx = 0;$$

если же $0 < y < \frac{1}{B}$, то для любой такой пары или $B < b_1 \leq \frac{1}{y}$, тогда

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \int_{b_1}^{\min(b_2, \frac{1}{y})} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon,$$

или $B < \frac{1}{y} \leq b_1$, тогда $\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \frac{\sin x}{x} dx = 0$. Следовательно,

в силу критерия Коши интеграл $\int_0^{+\infty} f(x, y) \frac{\sin x}{x} dx$ сходится равномерно на $[0; 1]$. Для доказательства неравномерной сходимости на $[0; 1]$ интеграла

$\int_0^{+\infty} \frac{f(x, y) |\sin x|}{x} dx$ прежде всего

заметим, что при любом $y \in [0; 1]$ этот интеграл сходится, так как подынтегральная функция отлична от нуля только на конечном интервале. Пусть $y_n = \frac{1}{4\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\int_{2\pi n}^{4\pi n} f(x, y_n) \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_{2\pi n}^{4\pi n} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2n}{4\pi n} \int_0^{\pi} |\sin x| dx = \frac{1}{\pi},$$

что в силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ и показывает неравномерную сходимость рассматриваемого интеграла на $[0; 1]$.

64. а) Интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$ сходится равномерно на M ;

б) Функция $g(x, y_0)$ монотонна на $[a; +\infty)$ для любого $y_0 \in M$ на $[\alpha; \beta]$.

65. Решение. Интегралы

$$\int_0^1 x^y f(x) dx = \int_0^1 x^{y-c} (x^c f(x)) dx$$

и

$$\int_1^{+\infty} x^y f(x) dx = \int_1^{+\infty} x^{y-d} (x^d f(x)) dx$$

сходятся равномерно в силу признака Абеля.

66. Решение. Неотрицательность $f(x, y)$ следует из ее определения. Если $x \geq 5$, то $0 < \frac{5}{2x} \leq \frac{1}{2}$ и

$$\sup_{y \in [0; 1]} f(x, y) \geq f\left(x, \frac{5}{2x}\right) = \frac{5}{2x \ln x}.$$

Следовательно, если $f(x, y) \leq \varphi(x)$, $x \in [2; +\infty)$, $y \in [0; 1]$,

то $\varphi(x) \geq \frac{5}{2x \ln x}$ для $x \geq 5$ и интеграл $\int_2^{+\infty} \varphi(x) dx$ расходится.

Покажем, что интеграл $\int_2^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно

на $[0; 1]$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое $B > 2$, что $\ln B \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Пусть $B < b_1 < b_2$. Если $1 \geq y \geq \frac{3}{b_1}$ или $0 \leq y \leq \frac{2}{b_2}$,

то $\int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx = 0$. Если же $\frac{2}{b_2} < y < \frac{3}{b_1}$, то

$$\begin{aligned} \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx &\leq \int_{\max(b_1, \frac{2}{y})}^{\frac{3}{y}} \frac{y \sin \pi x y}{\ln x} dx \leq \frac{1}{\ln b_1} \int_{\frac{2}{y}}^{\frac{3}{y}} y \sin \pi x y dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\ln B} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{2\pi}^{3\pi} \sin t dt < \frac{1}{\ln B} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, в силу критерия Коши данный интеграл сходится равномерно на $[0; 1]$.

67. Решение. Локальная монотонность функции $f(x, y_0)$, $y_0 \in [0; 1]$, в правой несобственной точке $+\infty$ следует из определения; равномерное стремление $f(x, y)$ к нулю при $x \rightarrow +\infty$ — из неравенства $|f(x, y)| \leq \frac{1}{x}$, $y \in [0; 1]$. Пусть $y_n = \frac{1}{4\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\int_{2\pi n}^{4\pi n} f(x, y) \sin x \, dx = \int_{2\pi n}^{4\pi n} \frac{\sin^2 x}{x} \, dx \geq \frac{2n}{4\pi n} \int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4},$$

что в силу произвольности $n \in \mathbb{N}$ и показывает неравномерную сходимость рассматриваемого интеграла на $[0; 1]$.

Функция $g_y(x) = f(x, y)$ монотонна на $(b(y), +\infty)$, и $b(y)$ зависит от y (ср. с примером 46 гл. I § 3).

68. Решение. Монотонность на $[0; +\infty)$ и стремление к нулю $f(x, y_0)$ при $x \rightarrow +\infty$ для любого $y_0 \in [0; 1]$ следует из опре-

деления. В силу признака Дирихле интеграл $\int_0^{+\infty} f(x, y_0) \sin x \, dx$

сходится при любом $y_0 \in [0; 1]$. Положим $B_1 = 2\pi n$, $B_2 = \pi(2n+1)$, $y_0 = \frac{1}{2\pi(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$, тогда $B_1 < B_2 < \frac{1}{y_0}$

и, следовательно, $f(x, y_0) = 1$ для $x \in [B_1; B_2]$. Отсюда по-

лучаем, что $\int_{B_1}^{B_2} f(x, y_0) \sin x \, dx = \int_{2\pi n}^{\pi(2n+1)} \sin x \, dx = 2$. Так как

$y_0 \in [0; 1]$, а B_1 может быть сколь угодно большим за счет выбора n , то полученное равенство показывает, что

$\int_0^{+\infty} f(x, y) \sin x \, dx$ сходится неравномерно на $[0; 1]$.

Функция $f(x, y)$ неравномерно стремится к нулю на $[0; +\infty)$.

69. Решение. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $f(x, y) \geq 0$ на $[0; +\infty) \times M$ и, следовательно, $f(x, y_0)$ монотонно не возрастает на $[a; +\infty)$ при любом $y_0 \in M$. Если $f(x, y)$ при $x \rightarrow +\infty$ сходится к нулю неравномерно на $[0; 1]$,

то существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся $y_n \in M$ и $x_n > \pi(2n + 1)$, удовлетворяющие условию $f(x_n, y_n) > \varepsilon_0$. Так как $f(x, y_n)$ монотонно не возрастает, то, не ограничивая общности, можно считать, что $f(x, y_n) > \varepsilon_0$ для всех $x \leq \pi(2n + 1)$. Отсюда получаем, что

$$\int_{2\pi n}^{2\pi n + \pi} f(x, y_n) \sin x \, dx \geq \varepsilon_0 \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2\varepsilon_0,$$

откуда следует неравномерная сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} f(x, y) \sin x \, dx$ на M . Полученное противоречие доказывает, что $f(x, y) \rightarrow 0$ на M при $x \rightarrow +\infty$.

70. Решение. Необходимость. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx$ сходится равномерно на M и $\{x_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая данному условию. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем такое $B > a$, что для любой пары b_1, b_2 , $B < b_1 < b_2$, имеем $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dx \right| < \varepsilon$ для всех $y \in M$. В силу монотонности последовательности $\{x_n\}$ и условия $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что $x_{m-1} > B$ для всех $m \in \mathbb{N}$, $m > N$. Тогда для всех $y \in M$ и любых натуральных чисел p и $m > N$ имеем

$$\left| \sum_{n=m}^{m+p} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t, y) \, dt \right| = \left| \int_{x_{m-1}}^{x_{m+p}} f(t, y) \, dt \right| < \varepsilon$$

и в силу критерия Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t, y) \, dt$ сходится равномерно на M .

Достаточность. Предположим, что интеграл $\int_a^{\omega} f(x, y) \, dx$ сходится неравномерно на M . Построим такую последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую заданным условиям, что

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t, y) dt$ будет также сходиться неравномерно

на M . Возьмем некоторую последовательность $\{c_n\}$: $a = c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots < \omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \omega$. Так как интеграл

$\int_a^{\omega} f(x, y) dx$ сходится неравномерно на M , то существует та-

кое число $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $B > a$ найдутся числа b_1, b_2 ,

$B < b_1 < b_2 < \omega$, и $y_1 \in M$, для которых $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx \right| > \varepsilon_0$.

Положим $x_0 = a$ и найдем x_1, x_2 , $a < x_1 < x_2 < \omega$, $y_1 \in M$ так,

что $\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t, y) dt \right| > \varepsilon_0$. Положим $B_1 = \max(x_2, c_1)$ и найдем

x_3, x_4 , $B_1 < x_3 < x_4 < \omega$, $y_2 \in M$ так, что $\left| \int_{x_3}^{x_4} f(t, y_2) dt \right| > \varepsilon_0$.

Продолжая этот процесс, получим последовательность $\{x_n\}$ и последовательность y_n такие, что

- 1) $y_n \in M$ для любого $n \in \mathbb{N}$,
- 2) $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_{2m-1} < x_{2m} < \dots < \omega$,
- 3) $c_{m-1} < x_{2m-1} < x_{2m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$,
- 4) $\left| \int_{x_{2m-1}}^{x_{2m}} f(t, y_m) dt \right| > \varepsilon_0$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Свойства 2) и 3) показывают, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \omega$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условиям формулировки

задачи, а свойства 1) и 3) — что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(t, y) dt$ схо-

дится неравномерно на M . Итак, получено противоречие с требованием равномерной сходимости этого ряда при любой последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющей этим условиям. Полученное противоречие заканчивает доказательство.

71. Решение. Сходимость интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-yx} \cos x \, dx$ на $(0; 1)$ следует из признака Дирихле, а неравномерная сходимость на $(0; 1)$ — из расходимости этого интеграла при $y = 0$ (см. задачу 61). Так как функция $\varphi(t) = te^{-kt}$, $k \neq 0$ на $[0; 1]$ неотрицательна, принимает наибольшее значение $\frac{1}{ke}$ при $t = \frac{1}{k}$ и

$$\begin{aligned} \int_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} e^{-yx} \cos x \, dx &= \frac{e^{-yx}}{1+y^2} (\sin x - y \cos x) \Big|_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} = \\ &= \frac{y}{1+y^2} e^{-2\pi y(n-1)^2} (1 - e^{-2\pi y(2n-1)}), \quad y \neq 0, \end{aligned}$$

то

$$0 \leq \int_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} e^{-yx} \cos x \, dx \leq ye^{-2\pi y(n-1)^2} \leq \frac{1}{2\pi e(n-1)^2},$$

$y \in (0; 1).$

В силу признака Вейерштрасса полученное неравенство доказывает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{2\pi(n-1)^2}^{2\pi n^2} e^{-yx} \cos x \, dx$ сходится равномерно на $(0; 1)$.

72. Указание. Если $x_{n-1} < b_1 < b_2 < x_m$, то

$$0 \leq \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dx \leq \sum_{i=n}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t, y) \, dt.$$

73. Указание. Если $x_{n-1} < b_1 < b_2 < x_m$, то величина $\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) \, dx \right|$ заключена между наибольшей и наименьшей

величинами:

$$\left| \sum_{i=n}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t, y) dt \right|, \quad \left| \sum_{i=n}^{m-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t, y) dt \right|,$$

$$\left| \sum_{i=n+1}^m \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t, y) dt \right|, \quad \left| \sum_{i=n+1}^{m-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t, y) dt \right|.$$

74. Указание. Обоснование производится так же, как обоснование перестановки двух несобственных интегралов при вычислении интеграла Френеля (см. пример 52 гл. I § 3).

Глава II. Ряды Фурье. Преобразование Фурье

§1. Ряды Фурье

Определение. Функция $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ называется функцией с интегрируемым квадратом на $[a; b]$, если $f \in \tilde{R}(a, b)$ и $f^2 \in \tilde{R}(a, b)$. Множество функций с интегрируемым квадратом на $[a; b]$ будем обозначать $\tilde{R}^2(a, b)$.

Отметим, что множества $\tilde{R}(a, b)$ и $\tilde{R}^2(a, b)$ частично пересекаются. Действительно, если неограниченная функция $f \in \tilde{R}(a, b)$; то f^2 не обязательно интегрируема на $[a; b]$, например, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ на $(0; 1)$. Для ограниченных на (a, b) функций из интегрируемости f на $[a; b]$ следует интегрируемость f^2 на $[a; b]$, но из интегрируемости f^2 на $[a; b]$ не следует интегрируемости f на $[a; b]$, например, $f(x) = \frac{1}{2} - D(x)$ на $[0; 1]$, где $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рационально,} \\ 0, & x \text{ — иррационально} \end{cases}$ — функция Дирихле.

Множество $\tilde{R}^2(a, b)$ представляет собой линейное пространство. Интеграл $\int_a^b f(x)g(x) dx$ определен для любых двух функций из $\tilde{R}^2(a, b)$. Его можно рассматривать как скалярное произведение в $\tilde{R}^2(a, b)$ и ввести соответствующую норму:

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Отметим, что функционал $\left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$ не удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым в определении нормы линейного пространства; именно, если $f \in \tilde{R}^2(a, b)$ и множество $M = \{x, x \in [a; b], f(x) \neq 0\}$ является множеством меры

нуль, то $\int_a^b f^2(x) dx = 0$. Таким образом, из условия $\|f\| = 0$

не следует, что f есть нулевой элемент пространства $\tilde{R}^2\langle a, b \rangle$, т. е. $f(x) \equiv 0$, $x \in [a; b]$, а следует только то, что $f(x) = 0$ для $x \in [a; b] \setminus M$, где M — множество меры нуль. Будем называть две функции $f \in \tilde{R}^2\langle a, b \rangle$ и $g \in \tilde{R}^2\langle a, b \rangle$ эквивалентными, если они отличаются только на множестве меры нуль; тогда

можно сказать, что функционал $\left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$ есть норма

в пространстве (линейном), элементами которого являются классы эквивалентных функций из $\tilde{R}^2\langle a, b \rangle$.

Определение. Система функций $\{\psi_i(x)\}$, $\psi_i \in \tilde{R}^2\langle a, b \rangle$, называется ортогональной на $[a; b]$, если

$$\int_a^b \psi_i(x) \psi_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ c_i > 0, & i = j. \end{cases}$$

Определение. Система функций $\{\psi_i(x)\}$, $\psi_i \in \tilde{R}^2\langle a, b \rangle$, называется ортонормированной на $[a; b]$, если эта система ортогональна на $[a; b]$ и

$$\|\psi_i\| = \left(\int_a^b \psi_i^2(x) dx \right)^{1/2} = 1$$

для всех i .

Если $\{\psi_i(x)\}$ — ортогональная система на $[a; b]$, то система $\left\{ \frac{\psi_i(x)}{\|\psi_i\|} \right\}$ ортонормированная на $[a; b]$.

Пример 1. Рассмотрим функции $u(x)$, являющиеся решениями уравнения $u'' + q(x)u = \lambda u$, где функция $q \in C^\infty[a, b]$ и λ — некоторое число.

Если при некотором λ существует отличная от тождественного нуля на $[a; b]$ функция $u_\lambda(x) \in C^2[a, b]$, удовлетворяющая этому уравнению и условиям $u(a) = u(b) = 0$, то такое число λ назовем собственным значением задачи, а функ-

цию u_λ — собственной функцией задачи, соответствующей собственному значению λ . Предположим, что существует последовательность $\{\lambda_i\}$ различных собственных значений задачи. Покажем, что система $u_i(x) = u_{\lambda_i}(x)$ соответствующих собственных функций ортогональна на $[a; b]$.

Действительно, во-первых, из непрерывности и отличия от тождественного нуля функции $u_i(x)$ следует неравенство

$$\int_a^b u_i^2(x) dx > 0. \text{ Во-вторых, интегрируя по частям, получаем}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i \int_a^b u_i(x) u_j(x) dx &= \int_a^b (u_i'' + q u_i) u_j dx = \\ &= \int_a^b q u_i u_j dx + u_i' u_j \Big|_a^b - \int_a^b u_i' u_j' dx = \int_a^b q u_i u_j dx - u_i u_j' \Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b u_i u_j'' dx = \int_a^b u_i (u_j'' + q u_j) dx = \lambda_j \int_a^b u_i u_j dx \end{aligned}$$

и так как $\lambda_i \neq \lambda_j$, то отсюда следует, что $\int_a^b u_i u_j dx = 0$.

Пример 2. Пусть $0 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \dots < \xi_i < \dots$ — последовательность корней уравнения $\operatorname{ctg} x = x$. Покажем, что система $\{\cos(\xi_i x)\}$ ортогональна на $[0; 1]$.

Действительно, во-первых, $\int_0^1 \cos^2(\xi_j x) dx > 0$. Во-вторых, если $i \neq j$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(\xi_i x) \cos(\xi_j x) dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\xi_i - \xi_j)}{\xi_i - \xi_j} + \frac{\sin(\xi_i + \xi_j)}{\xi_i + \xi_j} \right) = \\ &= \frac{1}{(\xi_i^2 - \xi_j^2) \sin \xi_i \cdot \sin \xi_j} (\xi_i \operatorname{ctg} \xi_j - \xi_j \operatorname{ctg} \xi_i) = 0. \end{aligned}$$

Определение. Пусть $\{\psi_i\}$ — ортогональная система на $[a; b]$ и $f \in \tilde{R}^2(a, b)$. Числа

$$c_i = c_i(f) = \frac{1}{\|\psi_i\|^2} \int_a^b f(x) \psi_i(x) dx$$

называются коэффициентами Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$.

Определение. Пусть $\{\psi_i\}$ — ортогональная система на $[a; b]$, $f \in \tilde{R}^2(a, b)$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i(x)$, где $c_i = c_i(f)$ — коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$, называется рядом Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$.

В дальнейшем, говоря о коэффициентах или ряде Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$, постоянно будем иметь в виду, что $f \in \tilde{R}^2(a, b)$ и система $\{\psi_i\}$ ортогональна на $[a; b]$, не оговаривая этого специально.

Если функция f представляет собой многочлен по ортогональной на $[a; b]$ системе $\{\psi_i\}$: $f = \sum_{i=1}^n \gamma_i \psi_i$, то, очевидно,

$$c_i = \frac{1}{\|\psi_i\|^2} \cdot \int_a^b f(x) \psi_i(x) dx = \begin{cases} \gamma_i, & 1 \leq i \leq n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

Таким образом, любой многочлен по ортогональной системе является своим рядом Фурье по этой системе, все коэффициенты c_i которого равны нулю, если $i > n$, где n — степень рассматриваемого многочлена.

Для коэффициентов Фурье $c_i = c_i(f)$ функции f по системе $\{\psi_i\}$ справедливо неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \cdot \|\psi_i\|^2 \leq \|f\|^2 = \int_a^b f^2(x) dx.$$

Если для системы $\{\psi_i\}$ выполнено условие $\inf_i \|\psi_i\| > 0$, в частности, если система $\{\psi_i\}$ ортонормированная, то из неравенства Бесселя следует, что последовательность $c_i(f)$ коэффициентов Фурье функции по системе $\{\psi_i\}$ бесконечно малая.

Определение. Последовательность $\{f_n\}$, $f_n \in \tilde{R}^2(a, b)$, называется сходящейся по норме, или сходящейся в среднем, к функции $f \in \tilde{R}^2(a, b)$, если $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, т. е.

$$\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность, сходящаяся в среднем к f ; $\{c_{n,i}\}$, $\{c_i\}$ соответственно — коэффициенты Фурье функций f_n и функции f по системе $\{\psi_i\}$. Из неравенства Бесселя следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,i} = c_i \quad (1)$$

для любого i .

Определение. Ортогональная система $\{\psi_i\}$ называется полной в $\tilde{R}^2(a, b)$ (или полной на $[a; b]$), если для любой функции $f \in \tilde{R}^2(a, b)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой полином $T_n(\psi_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i$ по системе $\{\psi_i\}$, что $\|f - T_n(\psi_i)\| < \varepsilon$.

Если система $\{\psi_i\}$ полна в $\tilde{R}^2(a, b)$, то неравенство Бесселя превращается в равенство Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \|\psi_i\|^2 = \|f\|^2 = \int_a^b f^2(x) dx.$$

Если выполнено равенство Парсеваля и все коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$ равны нулю, то получаем, что $\|f\| = 0$; следовательно, функция f эквивалентна тождественному нулю на $[a; b]$. Итак, если ортогональная система $\{\psi_i\}$ полна в $\tilde{R}^2[a, b]$, то каждому классу эквивалентных функций из $\tilde{R}^2[a, b]$ взаимно однозначно соответствует последовательность $\{c_i\}$ коэффициентов Фурье этих функций по системе $\{\psi_i\}$.

Коэффициенты Фурье $c_i(f) = c_i$ функции f по системе $\{\psi_i\}$ обладают экстремальным свойством: для любого полинома $T_n(\psi_i)$ степени не выше n по системе $\{\psi_i\}$ имеет место неравенство $\|f - T_n(\psi_i)\| \geq \|f - \sum_{i=1}^n c_i \psi_i\|$. Отсюда следу-

ет, что если система $\{\psi_i\}$ полна в $\tilde{R}^2[a, b]$, то $\|f - S_n\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, для любой функции $f \in \tilde{R}^2[a, b]$, где $S_n = \sum_{i=1}^n c_i \psi_i$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$, т. е. ряд Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}$ сходится в среднем к f .

Простейшей полной ортогональной системой является тригонометрическая система

$$\{\varphi_i\} = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

на отрезке $[-\pi; \pi]$.

В силу периодичности входящих в нее функций эта система является ортогональной и полной также на любом отрезке $[a; a + 2\pi]$. В основном, тригонометрическую систему рассматривают на отрезках $[-\pi; \pi]$ и $[0; 2\pi]$.

Линейная замена $t = \frac{lx}{\pi}$ переводит тригонометрическую систему в полную ортогональную систему $\{\varphi_i^{(l)}\}$:

$$\varphi_i^{(l)}(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi nx}{l}, & i = 2n - 1, \\ \sin \frac{\pi nx}{l}, & i = 2n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

на отрезке $[-l; l]$ или $[0; 2l]$. Ряд Фурье функции $f \in \tilde{R}^2[-l, l]$ по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ записывается в виде

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx, \\ n = 0, 1, 2, \dots,$$

и обозначается $\sigma_l(f)$ ($\sigma_\pi(f)$ будем обозначать просто $\sigma(f)$) так же, как систему $\{\varphi_i^{(\pi)}\}$ — просто $\{\varphi_i\}$). Равенство Пар-

сезаля для системы $\{\varphi_i^{(l)}\}$ имеет вид:

$$\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

Как и для любой ортогональной системы, многочлен

$$T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(\alpha_n \cos \frac{\pi n x}{l} + \beta_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ является своим рядом Фурье по этой системе. Из ограниченности тригонометрических функций следует и более общее утверждение.

Если тригонометрический ряд

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{\pi n x}{l} + \beta_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

сходится равномерно на $[-l; l]$ к функции $f(x)$, то этот ряд является рядом Фурье функции f по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ представляется тригонометрическим рядом или раскладывается в тригонометрический ряд по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$, если существуют такие две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, что

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$$

для $x \in [a; b] \setminus M$, где M — конечное множество.

В силу полноты системы $\{\varphi_i^{(l)}\}$ в $\tilde{R}^2[-l, l]$ для любой функции $f \in \tilde{R}^2[-l, l]$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-l}^l \left(f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right) \right) \right)^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right) \right) \right\| = 0, \end{aligned}$$

где a_i и b_i есть коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$. Это свойство формулируют так: любая функция

$f \in \tilde{R}^2[-l, l]$ представляется своим рядом Фурье, $\sigma_l(f)$, в смысле сходимости в среднем. Однако, поскольку сходимость в среднем последовательности $\{f_n\}$, $f_n \in \tilde{R}^2[a, b]$, к функции $f \in \tilde{R}^2[a, b]$ не влечет поточечной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ на $[a, b]$, даже если все функции f_n и f непрерывны на $[a, b]$ (см. задачу 1 гл. II § 5), то вопрос о поточечной сходимости ряда $\sigma_l(f)$ требует специального исследования.

Определение. Точка x_0 из множества определения функции f называется регулярной точкой этой функции, если существуют пределы:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0 + 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0 - 0)$$

и

$$f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)). \quad (2)$$

Все точки непрерывности функции, очевидно, являются ее регулярными точками.

Определение. Функция f , определенная на отрезке $[a, b]$, называется кусочно гладкой (или кусочно дифференцируемой) на $[a, b]$, если

1. множество M точек разрыва функции f на $[a, b]$ конечно и каждая точка $x_0 \in M$ есть точка разрыва первого рода функции f ;

2. функция f дифференцируема во всех точках $[a, b] \setminus M^1$, где M^1 — конечное множество (очевидно, $M^1 \supset M$);

3. для каждой точки $x_0 \in M^1$ существуют пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (3)$$

(если $x_0 \in M^1 \setminus M$, то существование этих пределов есть существование односторонних производных $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$).

Теорема (признак Дини поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье). Пусть $x_0 \in (-l; l)$ — регулярная точка функции $f \in \tilde{R}^2[-l, l]$. Если для некоторого $\delta > 0$ сходится интеграл

$$\int_0^\delta |f(x_0 + u) + f(x_0 - u) - 2f(x_0)| \frac{du}{u},$$

то ряд Фурье $\sigma_l(f)$ (по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$) функции f сходится в точке x_0 к $f(x_0)$.

Из этой теоремы вытекают следующие утверждения.

1. Принцип локализации Римана. Если функция $f \in \tilde{R}^2[-l, l]$ равна нулю в некоторой окрестности точки $x_0 \in (-l; l)$, то $\sigma_l(f)$ сходится в точке x_0 к нулю.

Отсюда следует, что для двух функций $f \in \tilde{R}^2[-l, l]$ и $g \in \tilde{R}^2[-l, l]$, совпадающих в некоторой окрестности точки $x_0 \in (-l; l)$, ряды $\sigma_l(f)$ и $\sigma_l(g)$ в точке x_0 одновременно сходятся или расходятся.

Принцип локализации часто выражают в такой форме: сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f \in \tilde{R}^2[-l, l]$ в точке $x_0 \in (-l; l)$ зависит от поведения f только в окрестности этой точки.

2. Если функция f непрерывна на $[-l; l]$ и в каждой точке интервала $(-l; l)$ имеет односторонние производные f'_- и f'_+ , то $\sigma_l(f)$ сходится к $f(x)$ для всех $x \in (-l; l)$.

3. Если функция f кусочно гладкая на $(-l; l)$, то для любой регулярной точки $x_0 \in (-l; l)$ этой функции ряд $\sigma_l(f)$ сходится к $f(x_0)$.

В силу периодичности тригонометрических функций ряд Фурье $\sigma_l(f)$, представляющий функцию $f(x)$ на $[-l; l]$, представляет в каждом отрезке $[a; b] \supset [-l; l]$ функцию $f^*(x)$, полученную $2l$ -периодическим продолжением функции $f(x)$ с интервала $(-l; l)$ на всю числовую прямую за исключением точек $l(2m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Значения $f^*(l(2m+1))$, $m \in \mathbb{Z}$, выбираются произвольно. Если определены значения $f(l-0)$ и $f(-l+0)$ (см. (2)), то обычно полагают

$$f^*(l(2m+1)) = \frac{1}{2}(f(l-0) + f(l+0)), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда при выполнении условия признака Дини для функции $f^*(x)$ в точке $x = l$, в частности, если функция $f^*(x)$ удовлетворяет условию (3) в точке $x = l$, ряд $\sigma_l(f^*)$ сходится в точках $x = l(2m+1)$ к $f^*(l(2m+1))$, $m \in \mathbb{Z}$.

Для определенности все формулы и утверждения были записаны для системы $\{\varphi_i^{(l)}\}$ на отрезке $[-l; l]$. Заменяя всюду промежуток $\langle -l; l \rangle$ на промежуток $\langle 0; 2l \rangle$, получим соответ-

ствующие формулы и утверждения для системы $\{\varphi_i^{(l)}\}$ на отрезке $[0; 2l]$.

Итак, для достаточно широкого класса функций задача представления функции тригонометрическим рядом по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ решается с помощью ряда Фурье по этой системе. Для сравнения рассмотрим представление функции степенным рядом Тейлора. Для определения коэффициентов ряда Тейлора функции f в окрестности точки x_0 необходима бесконечная дифференцируемость f в этой точке. Если полученный ряд Тейлора сходится в некоторой точке, отличной от x_0 , то, как степенной ряд, ряд Тейлора сходится на целом интервале. Однако сумма этого ряда может и не совпадать с порождающей функцией f . Разложение в ряд Тейлора или представление степенным рядом имеет место только для аналитических в некотором интервале функций, а этот класс уже класса функций, бесконечно дифференцируемых на этом интервале. Таким образом, величина коэффициентов ряда Тейлора есть локальное, а сходимость этого ряда к порождающей его функции есть глобальное свойство функции.

В отличие от степенных рядов принцип локализации Римана показывает, что сходимость тригонометрического ряда Фурье к порождающей его функции есть локальное свойство; в то время как величина коэффициентов Фурье — глобальное свойство. Поэтому, с одной стороны, исследовать сходимость тригонометрического ряда Фурье приходится в полном смысле “поточечно”, — в каждой точке независимо от других; а, с другой стороны, представление функции тригонометрическим рядом Фурье возможно для гораздо более широкого класса функций, нежели аналитические. В частности, одним из примеров непрерывной нигде не дифференцируемой функции является именно функция, представимая равномерно сходящимся к ней тригонометрическим рядом Фурье.

Если представление функции тригонометрическим рядом является частью решения другой задачи, то система $\{\varphi_i^{(l)}\}$ и соответствующий отрезок определяются условиями этой задачи. Поскольку здесь разложение в тригонометрический ряд рассматривается как самостоятельная задача, то необ-

ходимо указание, по какой именно системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ и на каком отрезке требуется получить представление данной функции тригонометрическим рядом. Формулировка “найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции f на отрезке $[-l; l]$ (или $[0; 2l]$)” и будет обозначать, что ряд Фурье образуется по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ и рассматривается на соответствующем отрезке. Вопрос о сходимости полученного ряда к данной функции при этом не возникает, так как все рассматриваемые функции удовлетворяют условию Дини всюду на $(-l; l)$ ($(0; 2l)$) за исключением, может быть, нескольких особых точек.

Пример 3. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ на отрезке $[-1; 1]$.

Формулировка показывает, что ряд Фурье образуется по системе

$$\{\varphi_i^{(1)}\} = \{1, \cos \pi x, \sin \pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \dots, \cos n\pi x, \sin n\pi x, \dots\}.$$

Таким образом,

$$a_0 = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 - x - 1) dx = -\frac{4}{3},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 - x - 1) \cos n\pi x dx = \\ &= \frac{1}{\pi n} \left((x^2 - 1) \sin \pi n x \Big|_{-1}^1 - 2 \int_{-1}^1 x \sin \pi n x dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} \left(x \cos \pi n x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \cos \pi n x dx \right) = \\ &= \frac{4}{\pi^2 n^2} (-1)^n, \quad n \neq 0. \end{aligned}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 (x^3 + x^2 - x - 1) \sin \pi n x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi n} \left((x^3 - x) \cos \pi n x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (3x^2 - 1) \cos \pi n x \, dx \right) = \\
&= \frac{1}{\pi^2 n^2} \left((3x^2 - 1) \sin \pi n x \Big|_{-1}^1 - 6 \int_{-1}^1 x \sin \pi n x \, dx \right) = \\
&= \frac{6}{\pi^3 n^3} \left(x \cos \pi n x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \cos \pi n x \, dx \right) = \\
&= \frac{12}{\pi^3 n^3} (-1)^n.
\end{aligned}$$

Так как функция $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ дифференцируема на $(-1; 1)$, то равенство

$$x^3 + x^2 - x - 1 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{3 \cdot (-1)^n}{\pi n^3} \sin nx \right)$$

имеет место для всех $x \in (-1; 1)$. Так как $f(-1) = f(1) = 0$, то 2-периодическое продолжение функции $f(x)$ на всю числовую прямую дает непрерывную на всей числовой прямой функцию $f^*(x)$. Легко проверить, что

$$f_+^*(2k+1) = 0, \quad f_-^*(2k+1) = 4$$

(см. рис. 5). Следовательно, в силу признака Дини равенство

$$f^*(x) = -\frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx + \frac{3 \cdot (-1)^n}{\pi n^3} \sin nx \right)$$

имеет место на всей числовой прямой.

Пример 4. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, на отрезке $[0; 1]$.

Формулировка показывает, что ряд Фурье образуется по системе $\{\varphi_i^{(\frac{1}{2})}(x)\}$: $\{1, \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \sin 4\pi x, \cos 4\pi x, \dots, \sin 2n\pi x, \cos 2n\pi x, \dots\}$. Таким образом,

$$a_0 = 2 \int_0^1 e^{ax} \, dx = \frac{2}{a} (e^a - 1);$$

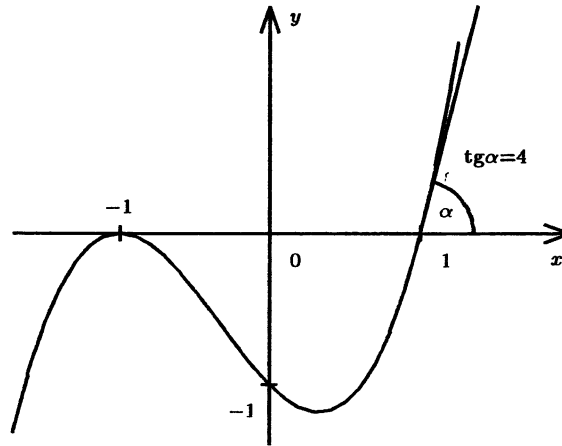


Рис. 5

$$\begin{aligned}
 a_n &= 2 \int_0^1 e^{ax} \cos 2\pi n x \, dx = \\
 &= \left(\frac{2e^{ax}}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \cdot (a \cos 2\pi n x + 2\pi n \sin 2\pi n x) \right) \Big|_0^1 = \frac{2a(e^a - 1)}{a^2 + 4\pi^2 n^2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= 2 \int_0^1 e^{ax} \sin 2\pi n x \, dx = \\
 &= \left(\frac{2e^{ax}}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \cdot (a \sin 2\pi n x + 2\pi n \cos 2\pi n x) \right) \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{4\pi n}{a^2 + 4\pi^2 n^2} (1 - e^a).
 \end{aligned}$$

Так как функция $f(x) = e^{ax}$ дифференцируема на $(0; 1)$, то равенство

$$\begin{aligned}
 e^{ax} &= \frac{e^a - 1}{a} + \\
 &+ 2(e^a - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \cos 2\pi n x - \frac{4\pi n}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \sin 2\pi n x \right)
 \end{aligned}$$

имеет место для всех $x \in (0; 1)$. 1-периодическое продолжение функции $f(x) = e^{ax}$ дает функцию $f^*(x)$, разрывную в точках $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$ (см. рис. 6). Так как

$$\begin{aligned} f(1-0) &= \lim_{x \rightarrow 1-} e^{ax} = e^a, \\ f(0+0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} e^{ax} = 1, \end{aligned}$$

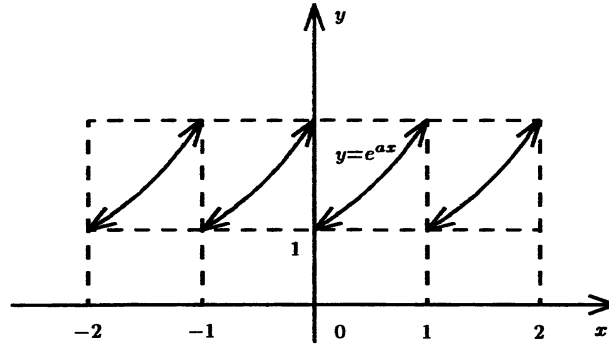


Рис. 6

то положим $f^*(k) = \frac{e^a + 1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f^*(k+h) - f^*(k+0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{e^{ah} - 1}{h} = a; \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f^*(k+h) - f^*(k+0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{e^{a(1+h)} - e^a}{h} = ae^a, \end{aligned}$$

то в каждой точке $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$, условие признака Дини выполнено. Следовательно,

$$\begin{aligned} f^*(k) &= \frac{e^a + 1}{2} = \frac{e^a - 1}{a} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2a(e^a - 1)}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \cos 2\pi nk + \frac{4\pi n(1 - e^a)}{a^2 + 4\pi^2 n^2} \sin 2\pi nk \right) = \\ &= \frac{e^a - 1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^a - 1)2a}{a^2 + 4\pi^2 n^2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \sin 2x + \cos 5x$ на отрезке

а) $[-\pi; \pi]$; б) $[-\pi/2; \pi/2]$.

Отрезку $[-\pi; \pi]$ соответствует система

$$\{\varphi_i(x)\} = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots\}.$$

Поскольку данная функция является многочленом относительно этой системы, то, следовательно, этот многочлен и представляет собой соответствующий ряд Фурье, т. е.

$$\sigma(f) = \sin 2x + \cos 5x.$$

Отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ соответствует система $\{\varphi_i^{(\frac{\pi}{2})}(x)\} = \{1, \sin 2x, \cos 2x, \sin 4x, \cos 4x, \dots, \sin 2nx, \cos 2nx, \dots\}$. Относительно этой системы данная функция уже не является многочленом, так как функция $\cos 5x$ не входит в систему. Вычислим коэффициенты Фурье $f(x)$ по системе $\{\varphi_i^{(\pi/2)}\}$ стандартным способом:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin 2x + \cos 5x) \cos 2nx \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\cos(5+2n)x + \cos(2n-5)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(5+2n)x}{5+2n} + \frac{\sin(2n-5)x}{2n-5} \right] \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \frac{20}{\pi} (-1)^n \cdot \frac{1}{4n^2 - 25}; \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin 2x + \cos 5x) \sin 2nx \, dx = 0, \quad n \neq 1. \\ b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^2 2x + \sin 2x \cdot \cos 5x) \, dx = 1. \end{aligned}$$

Функция $f(x) = \sin 2x + \cos 5x$ дифференцируема на $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Так как $f(\frac{\pi}{2}) = f(-\frac{\pi}{2}) = 0$, то ее π -периодическое продолжение дает функцию $f^*(x)$, непрерывную на всей числовой прямой. Легко проверить, что

$$(f^*(x))'_+|_{x=\frac{\pi}{2}+\pi k} = 3, \quad (f^*(x))'_-|_{x=-\frac{\pi}{2}+\pi k} = -7$$

(см. рис. 7). Следовательно, применяя признак Дини, получа-

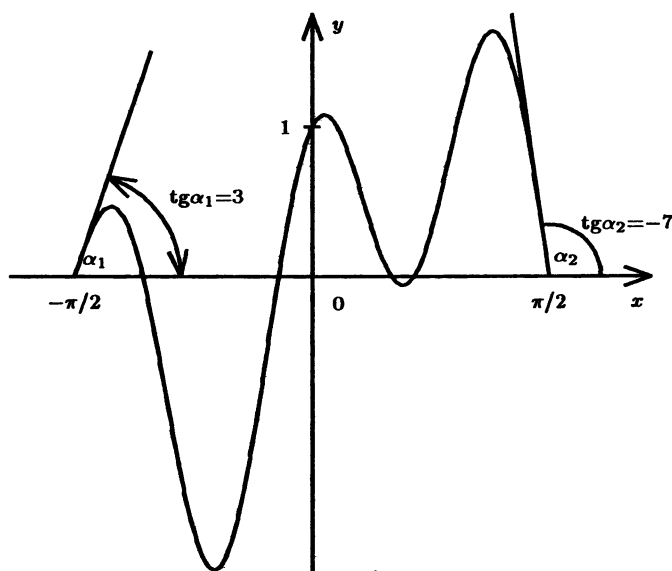


Рис. 7

ем, что равенство

$$f^*(x) = -\frac{2}{5\pi} + \sin 2x + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 25} \cos 2nx$$

справедливо для всех значений x . Обратим внимание на то, что функция $f^*(x)$ равна $\sin 2x + \cos 5x$ на отрезках $[\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{3\pi}{2} + 2\pi m]$, $m \in \mathbb{Z}$, а на интервалах $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{\pi}{2} + 2\pi m)$, $m \in \mathbb{Z}$, равна $\sin(2(x - \pi)) + \cos(5(x - \pi)) = \sin 2x - \cos 5x$.

Если рассматривается отрезок $[-l; l]$, симметричный относительно начала координат, то для четной функции $f \in \tilde{R}^2[-l, l]$ имеем

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \quad n \in \mathbb{N}; \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

а для нечетной функции $g \in \tilde{R}^2[-l, l]$

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5)$$

Пример 6. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x \cos x$ на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$.

Отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ соответствует система $\{\varphi_i^{(\pi/2)}(x)\} = \{1, \sin 2x, \cos 2x, \sin 4x, \cos 4x, \dots, \sin 2nx, \cos 2nx, \dots\}$. В силу нечетности функции f получаем, что $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \cos x \sin 2nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x (\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[x \left(\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} \right) \right] \Big|_0^{\pi/2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos(2n+1)x dx + \frac{1}{2n-1} \int_0^{\pi/2} \cos(2n-1)x dx \right\} = \\ &= \frac{2 \cdot (-1)^n}{\pi} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n-1)^2} \right] = \frac{16 \cdot (-1)^{n-1} n}{\pi(4n^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Периодическое с периодом π продолжение функции $f(x) = x \cos x$ с $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ дает функцию f^* , непрерывно дифференцируемую на всей числовой прямой (проверьте!). Следовательно, равенство

$$x \cos x = \frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{4n^2 - 1} \sin 2nx$$

имеет место на всем отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Справедливость этого равенства в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ видна и непосредственно, так как в этих точках обе его части обращаются в нуль. Но хотелось обратить внимание на общий принцип исследования поведения тригонометрического ряда Фурье в конечных точках рассматриваемого отрезка.

Пример 7. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x \sin 2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ соответствует система $\{\varphi_i^{(\pi/4)}(x)\} = \{1, \sin 4x, \cos 4x, \sin 8x, \cos 8x, \dots, \sin 4nx, \cos 4nx, \dots\}$. В силу четности функции f получаем, что $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} x \sin 2x \, dx = -\frac{4}{\pi} \left(x \cos 2x \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx \right) = \frac{2}{\pi}; \\ a_n &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\pi/4} x \sin 2x \cos 4nx \, dx = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} x [\sin(4n+2)x - \sin(4n-2)x] \, dx = \\ &= \frac{4}{\pi} \left\{ \left[x \left(\frac{\cos(4n-2)x}{4n-2} - \frac{\cos(4n+2)x}{4n+2} \right) \right] \Big|_0^{\pi/4} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\sin(4n-2)x}{(4n-2)^2} - \frac{\sin(4n+2)x}{(4n+2)^2} \right) \Big|_0^{\pi/4} \right\} = \\ &= \frac{(-1)^n \cdot 2(4n^2 + 1)}{\pi(4n^2 - 1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Периодическое с периодом $\frac{\pi}{2}$ продолжение функции $f(x) = x \sin 2x$ с $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ дает функцию f^* , непрерывную на всей числовой прямой^{*)}, но не дифференцируемую в точках $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Равенства

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f^*\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + h\right) - f^*\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f\left(-\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{h} = (x \sin 2x)' \Big|_{x=-\pi/4} = -1, \\ \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f^*\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + h\right) - f^*\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h} = (x \sin 2x)' \Big|_{x=\pi/4} = 1 \end{aligned}$$

показывают, что в этих точках условие Дини выполнено. Итак, равенство

$$x \sin 2x = \frac{1}{\pi} + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{4n^2 - 1} \cos 4nx$$

имеет место во всех точках отрезка $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Поскольку аргументы всех функций системы $\{\varphi_i^{(l)}(x)\}$ кратны аргументу $\frac{\pi x}{l}$ второй и третьей функции этой системы, то минимальный период $2l$ функций $\sin \frac{\pi x}{l}$ и $\cos \frac{\pi x}{l}$ является и минимальным общим периодом всех функций системы $\{\varphi_i^{(l)}(x)\}$. Поэтому, если функция f имеет период $T = 2l$ и $f \in \tilde{R}^2[-l, l]$, то при отсутствии других условий естественно рассматривать разложение f в ряд Фурье по системе $\{\varphi_i^{(l)}(x)\}$ на отрезке $[-l, l]$. Как следует из результата задачи 10 гл. II § 5 коэффициенты ряда

$$\sigma_l(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

^{*)} Для непрерывных и четных на $[-l, l]$ функций $2l$ -периодическое продолжение с $[-l, l]$ всегда непрерывно на всей числовой прямой.

не зависят от того, является ли $T = 2l$ минимальным периодом функции или нет, т. е. этот ряд есть ряд Фурье функции f по любой системе

$$\{\varphi_i^{(ml)}\} = \left\{ 1, \sin \frac{\pi x}{ml}, \cos \frac{\pi x}{ml}, \sin \frac{2\pi x}{ml}, \cos \frac{2\pi x}{ml}, \dots \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Поэтому, если $T = 2l$ — минимальный период функции $f \in \tilde{R}^2$ и в условии задачи не указан отрезок, на котором ищется разложение f в тригонометрический ряд Фурье, то это разложение производится по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ на отрезке $[-l; l]$.

Если же отрезок $[-a; a]$ (или $[0; 2a]$) указан, то необходимо различать два варианта. Первый — $2a$ не является кратным T — в таком случае разложение производится согласно общему правилу по системе $\{\varphi_i^{(a)}\}$ (см. пример 5 гл. II § 1). Второй вариант — $2a$ является кратным T , т. е. $2a = kT$, $k \in \mathbb{N}$. В таком случае, как указано выше, достаточно вычислить коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_i^{(\frac{T}{2})}\}$, и полученный ряд будет одновременно и рядом Фурье по системе $\{\varphi_i^{(a)}\} = \{\varphi_i^{(\frac{kT}{2})}\}$.

Пример 8. Символ (x) обозначает расстояние от числа x до ближайшего целого числа. Найти разложение функции $f(x) = (x)$ в тригонометрический ряд Фурье

а) на $[0; 3/2]$,

б) на $[0; 8]$.

Решение. Функция f имеет минимальный период 1 (см. рис. 8а). Поскольку длина отрезка $\left[0; \frac{3}{2}\right]$, заданного в п. а),

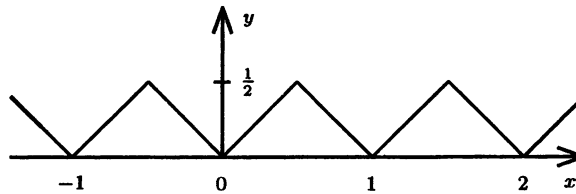


Рис. 8а

не кратна 1, то производим разложение по системе $\{\varphi_i^{(3/4)}\} = \left\{1, \sin \frac{4\pi x}{3}, \cos \frac{4\pi x}{3}, \dots, \sin \frac{4\pi n x}{3}, \cos \frac{4\pi n x}{3}, \dots\right\}$. Имеем

$$a_0 = \frac{4}{3} \int_0^{3/2} f(x) dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2}.$$

Для упрощения выкладок заметим, что функция $f(x) - \frac{1}{4}$, периодически продолженная с интервала $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ с периодом $T = \frac{3}{2}$, дает нечетную функцию (см. рис. 86, в). Следовательно

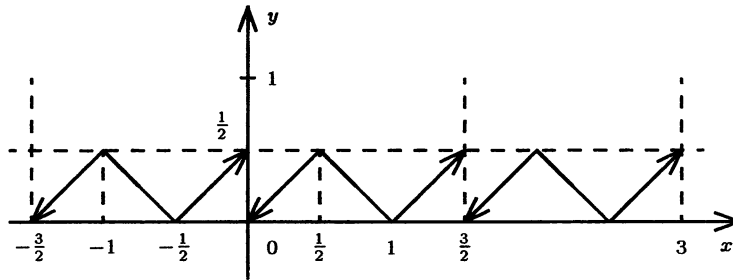


Рис. 86

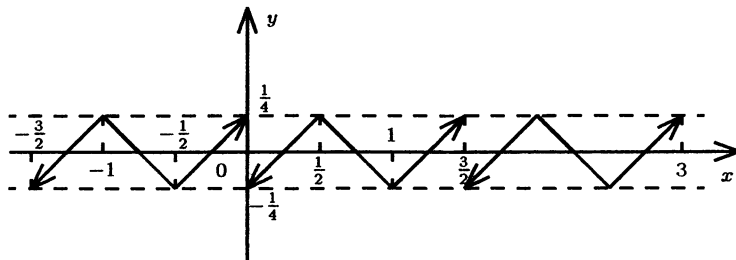


Рис. 8в

но, $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Вычисляем коэффициенты b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{3} \int_0^{1/2} x \sin \frac{4\pi n x}{3} dx + \int_{1/2}^1 (1-x) \sin \frac{4\pi n x}{3} dx + \\ &+ \int_{3/2}^2 (x-1) \sin \frac{4\pi n x}{3} dx = \frac{1}{\pi n} \left[-x \cos \frac{4\pi n x}{3} \Big|_0^{1/2} + \right. \\ &+ \int_0^{1/2} \cos \frac{4\pi n x}{3} dx - (1-x) \cos \frac{4\pi n x}{3} \Big|_{1/2}^1 - \\ &- \int_{1/2}^1 \cos \frac{4\pi n x}{3} dx - (x-1) \cos \frac{4\pi n x}{3} \Big|_1^{3/2} + \left. \int_1^{3/2} \cos \frac{4\pi n x}{3} dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi n} \left[-\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi n}{3} + \frac{3}{4\pi n} \sin \frac{2\pi n}{3} + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi n}{3} - \right. \\ &- \frac{3}{4\pi n} \sin \frac{4\pi n}{3} + \frac{3}{4\pi n} \sin \frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{2} \cos 2\pi n + \\ &+ \left. \frac{3}{4\pi n} \sin 2\pi n - \frac{3}{4\pi n} \sin \frac{4\pi n}{3} \right] = -\frac{3}{8\pi n} + \frac{9}{4\pi^2 n^2} \sin \frac{2\pi n}{3}. \end{aligned}$$

Так как во всех точках интервала $(0; 3/2)$ функция f удовлетворяет условию признака Дини, то равенство

$$f(x) = \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{8\pi n} \left(1 - \frac{6}{\pi n} \sin \frac{2\pi n}{3} \right) \sin \frac{4\pi n x}{3}$$

верно для всех $x \in (0; 3/2)$.

В пункте б) формально надо было производить разложение по системе

$$\{\varphi_i^{(4)}\} = \left\{ 1, \sin \frac{\pi x}{4}, \cos \frac{\pi x}{4}, \dots, \sin \frac{\pi n x}{4}, \cos \frac{\pi n x}{4}, \dots \right\},$$

но так как длина отрезка $[0; 8]$, заданного в этом пункте кратна 1 — минимальному периоду f , то требуемым тригонометрическим рядом будет ряд по системе $\{\varphi_i^{(\frac{1}{2})}\} = \{1, \sin 2\pi x,$

$\cos 2\pi x, \sin 4\pi x, \cos 4\pi x, \dots, \sin 2\pi nx, \cos 2\pi nx\}$. В силу четности функции $f(x)$ получаем, что $b_n = 0, n \in \mathbb{N}$, и

$$\begin{aligned} a_0 &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2}, \\ a_n &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) \cos 2\pi nx dx = \frac{2}{\pi n} \left(x \sin 2\pi nx \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2\pi nx dx \right) = \frac{1}{\pi^2 n^2} \cos 2\pi nx \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ -\frac{2}{\pi^2 (2m-1)^2}, & n = 2m-1, \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Так как функция f 1-периодическая и в каждой точке числовой оси удовлетворяет условию признака Дини, то равенство

$$(x) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)2\pi x}{(2m-1)^2}$$

верно на всей числовой оси.

Используя связь показательной и тригонометрических функций, можно получить тригонометрический ряд Фурье аналитической относительно $\cos x$ и $\sin x$ функции f на отрезке $[-\pi; \pi]$, не прибегая к интегральному вычислению коэффициентов. Для этого положим $t = e^{ix}$, тогда $\cos x = \frac{t^2 + 1}{2t}$ и $\sin x = \frac{t^2 - 1}{2t}$. После разложения функции f в степенной ряд по t обратным переходом к функциям $\cos nx$ и $\sin nx$ получается тригонометрический ряд по системе $\{\varphi_i(x)\}$. Из аналитичности функции f следует равномерная сходимость этого ряда на $[-\pi; \pi]$ к f , откуда в силу приведенной выше теоремы следует, что полученный тригонометрический ряд есть именно ряд Фурье $\sigma(f)$ по системе $\{\varphi_i(x)\}$ функции f .

Пример 9. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \ln(1 - 2q \cos x + q^2)$ ($|q| < 1$).

Функция $f(x) = \ln(1 - 2q \cos x + q^2)$ имеет минимальный период $T = 2\pi$. Поскольку в условии не указан отрезок, на котором производится разложение, то, как сказано выше, берем отрезок $[-\pi; \pi]$ и соответствующую систему $\{\varphi_i(x)\}$. Полагая $t = e^{ix}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \ln(1 - 2q \cos x + q^2) &= \ln \left(1 - q \left(t + \frac{1}{t} \right) + q^2 \cdot t \cdot \frac{1}{t} \right) = \\ &= \ln \left((1 - qt) \left(1 - \frac{q}{t} \right) \right) = \ln(1 - qt) + \ln \left(1 - \frac{q}{t} \right). \end{aligned}$$

Так как $|qt| = |qe^{ix}| = |qe^{-ix}| = \left| \frac{q}{t} \right| = |q| < 1$, то для любого $t = e^{ix}$, $x \in [-\pi; \pi]$, имеем равенства:

$$\begin{aligned} \ln(1 - qt) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n t^n}{n}, \quad \ln \left(1 - \frac{q}{t} \right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n t^{-n}}{n}, \\ \ln(1 - qt) + \ln \left(1 - \frac{q}{t} \right) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} (t^n + t^{-n}). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любого $x \in [-\pi; \pi]$ имеем равенство

$$\ln(1 - 2q \cos x + q^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx \quad (|q| < 1),$$

и поскольку этот ряд сходится равномерно на $[-\pi; \pi]$, то он есть тригонометрический ряд Фурье своей суммы. Таким образом, разложение функции $f(x) = \ln(1 - 2q \cos x + q^2)$ в тригонометрический ряд Фурье получено.

Заметим, что из полученного разложения для любого натурального n следует равенство

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2q \cos x + q^2) \cos nx \, dx = -\frac{\pi q^n}{n} \quad (|q| < 1).$$

Пример 10. Найти разложение в тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ ($x \neq 2\pi k$).

Функция $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ имеет минимальный период 2π , следовательно, разложение производится по системе $\{\varphi_i(x)\}$

на $[-\pi; \pi]$. В данном случае полученная заменой $t = e^{ix}$ функция $\tilde{f}(t) = \ln \left| \frac{t-1}{2\sqrt{t}} \right|$ не является аналитической. Заметив, что

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1-} \ln(1 - 2q \cos x + q^2) &= \ln 2(1 - \cos x) = \\ &= \ln 4 + 2 \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|, \quad x \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

постараемся найти связь коэффициентов Фурье функций $f_q(x) = \ln(1 - 2q \cos x + q^2)$ и $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$. Обозначим для краткости $\ln(1 - 2q \cos x + q^2) = f_q(x)$ и $\ln 4 \sin^2 \frac{x}{2} = f_1(x)$, тогда $f(x) = -\ln 2 + \frac{1}{2} f_1(x)$. Пусть $a_{q,n}$ — коэффициенты Фурье $f_q(x)$; как показано в примере 9, $a_{q,n} = -\frac{2q^n}{n}$.

Функция $f_1(x) \in \tilde{R}^2[-\pi, \pi]$. Если семейство $f_q(x)$ сходится при $q \rightarrow 1-$ к $f_1(x)$ не только поточечно на $(-\pi; \pi) \setminus \{0\}$, но и в среднем на $[-\pi; \pi]$, то в силу соотношения (1) числа $a_n = \lim_{q \rightarrow 1-} a_{q,n} = -\frac{2}{n}$ являются соответствующими коэффициентами Фурье функции $f_1(x)$ и, следовательно, ряд

$$-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

есть тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ по системе $\{\varphi_i(x)\}$. В силу 2π -периодичности функции f и ее дифференцируемости для всех $x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, равенство

$$\ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| = -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$$

справедливо для всех $x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Для полноты решения осталось проверить, что семейство $\{f_q(x)\}$ сходится при $q \rightarrow 1-$ к $f_1(x)$ в среднем на $[-\pi; \pi]$, поскольку это утверждение не следует из поточечной сходимости $f_q(x)$ при $q \rightarrow 1-$ к $f_1(x)$ для $x \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Функция

$$\varphi(x, q) = [f_q(x) - f_1(x)]^2 = \ln^2 \frac{1 - 2q \cos x + q^2}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}$$

непрерывна на $[\delta; \pi] \times [0; 1]$ при любом δ , $0 < \delta < \pi$; следовательно,

$$\lim_{q \rightarrow 1-} \int_{\delta}^{\pi} \varphi(x, q) dx = \int_{\delta}^{\pi} \lim_{q \rightarrow 1-} \varphi(x, q) dx = 0, \quad 0 < \delta < \pi.$$

Если $\cos \frac{x}{2} \geq \frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4} < q < 1$, то

$$\begin{aligned} 2 &\geq 1 - 2q \cos x + q^2 = (1 - q \cos x)^2 + q^2 \sin^2 x \geq \\ &\geq 4q^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \geq \sin^2 \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\ln \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \geq \ln \frac{1 - 2q \cos x + q^2}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \geq -\ln 4,$$

откуда получаем неравенство

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi(x, q) &= \ln \frac{1 - 2q \cos x + q^2}{4} \leq \ln^2 \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + \ln^2 4 \\ &\left(\frac{3}{4} < |q| < 1, \quad 0 < |x| \leq 2 \arccos \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Так как функция $\ln^2 \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + \ln^2 4$ интегрируема на $[0; \pi]$

в смысле несобственного интеграла, то отсюда следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое δ , $0 < \delta < \pi$, для

которого неравенство $\int_{\delta}^{\pi} \varphi(x, q) dx < \frac{\varepsilon}{4}$ верно при любом q ,

$\frac{3}{4} < q < 1$. Зафиксируем такое δ , найдем такое $q_0 > \frac{3}{4}$, что

$$\int_{\delta}^{\pi} \varphi(x, q) dx < \frac{\varepsilon}{4}, \quad q \in (q_0; 1).$$

Окончательно, для $q \in (q_0; 1)$ в силу четности функций

$f_q(x)$, $0 \leq q < 1$, и $f_1(x)$ имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f_q(x) - f_1(x))^2 dx &= 2 \int_0^{\pi} \varphi(x, q) dx = \\ &= 2 \int_0^{\delta} \varphi(x, q) dx + 2 \int_{\delta}^{\pi} \varphi(x, q) dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

что и показывает утверждение о сходимости в среднем на $[-\pi; \pi]$ семейства $f_q(x)$ к $f_1(x)$ при $q \rightarrow 1-$.

Замечание. Равенства

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \cos nx dx = \lim_{q \rightarrow 1-} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_q(x) \cos nx dx = \lim_{q \rightarrow 1-} a_{q,n},$$

$n \in \mathbb{N}$,

можно было получить и переходом к пределу под знаком интеграла, но обоснование законности такого перехода требует рассуждений, схожих с проведенными. В данном случае хотелось обратить внимание на связь сходимости в среднем последовательности функций и сходимости соответствующих коэффициентов Фурье.

Пусть функция $f \in \tilde{R}^2[-\pi, \pi]$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ и $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in [-\pi; \pi]$. Тогда коэффициенты a_n, b_n , $n \in \mathbb{N}$, ряда $\sigma(f)$ и коэффициенты A_n, B_n , $n \in \mathbb{N}$, ряда $\sigma(F)$ связаны равенствами:

$$A_n = \frac{b_n}{n}, \quad B_n = -\frac{a_n}{n}.$$

Так как в силу равенства Парсеваля ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| \frac{a_n}{n} \right| + \left| \frac{b_n}{n} \right| \right)$. Итак, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится к $f(x)$ в среднем на $[-\pi; \pi]$, а ряд

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{n} \cos nx - \frac{a_n}{n} \sin nx \right)$$

уже равномерно на $[-\pi; \pi]$ сходится к $F(x)$. Таким образом, получаем, что ряд Фурье по системе $\{\varphi_i(x)\}$ независимо от того, сходится он равномерно на $[-\pi; \pi]$ или нет, допускает почленное интегрирование. Обратно, если 2π -периодическая функция $F(x)$ является обобщенной первообразной функции $f(x) \in \tilde{R}^2[-\pi, \pi]$, то ряд Фурье $\sigma(f)$ является почленно продифференцированным рядом Фурье $\sigma(F)$. Так как коэффициенты Фурье функции f образуют бесконечно малую последовательность, то в этом случае коэффициенты Фурье функции F имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \rightarrow \infty$. Продолжая это рассуждение по индукции, получаем утверждение:

Если функция $F \in C^{m-1}[-\pi; \pi]$, $m \in \mathbb{N}$, $F^{(m)} \in \tilde{R}^2[-\pi, \pi]$ и $F^{(j)}(-\pi) = F^{(j)}(\pi)$, $0 \leq j \leq m-1$, то коэффициенты ряда Фурье $\sigma(F)$ имеют порядок $o\left(\frac{1}{n^m}\right)$, $n \rightarrow \infty$.

Аналогичное утверждение имеет место и для любой системы $\{\varphi_i^{(l)}(x)\}$.

Пример 11. Напишем тригонометрический ряд Фурье функции $f(x) = x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. В силу нечетности данной функции получаем, что $a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi n} \left(-x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Так как для любого $x \in (-\pi; \pi)$ условие признака Дини выполнено, то равенство

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

верно для любого $x \in (-\pi; \pi)$. Непосредственно видно, что в точках $x_m = (2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, ряд $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ сходится к $\frac{f(\pi-0) + f(-\pi+0)}{2} = 0$.

Функция $F(x) = \frac{x^2}{2}$ является первообразной для $f(x) = x$ на $[-\pi; \pi]$. Следовательно, как разобрано выше, ряд

$$\frac{A_0}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

является рядом $\sigma(F)$, равномерно сходящимся к 2π -периодической функции F^* , совпадающей на $[-\pi; \pi]$ с F . Значение коэффициента A_0 находится по общей формуле

$$A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Итак, для всех $x \in [-\pi; \pi]$ имеем равенство

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Очевидно, функция $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{6}$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = 0 \text{ и одной из ее первообразных является нечетная}$$

функция $\Phi(x) = \frac{x^3 - \pi^2 x}{6}$. Следовательно, ряд $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx$

является рядом $\sigma(\Phi)$ ($A_0 = 0$ в силу нечетности Φ). Так как

ряд $\frac{\pi^2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$ есть ряд $\sigma(y)$, где $y = \frac{\pi^2 x}{6}$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \left[2 - \frac{\pi^2 n^2}{3} \right] \sin nx \text{ есть ряд } \sigma(G), \text{ где } G(x) = \frac{x^3}{6}.$$

Функция $\Phi \in C^\infty[-\pi; \pi]$ и удовлетворяет условиям $\Phi(-\pi) = -\Phi(\pi)$, $\Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi)$; согласно вышеприведенному утверж-

дению, ее коэффициенты Фурье имеют порядок $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \rightarrow \infty$. Хотя функция G также бесконечно дифференцируема на $[-\pi; \pi]$, но на концах этого отрезка принимает различные значения. Этим обстоятельством и объясняется, почему коэффициенты Фурье функции G имеют порядок $o\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \rightarrow \infty$, а не $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \rightarrow \infty$.

Непосредственно проверяется, что каждая из систем:

$$\varphi_i(x) = \cos(i-1)x,$$

$$\psi_i(x) = \sin ix, \quad i \in \mathbb{N},$$

ортogonalна на $[0; \pi]$. Если функция $f \in \tilde{R}^2[0, \pi]$, то для функции g , совпадающей с f на $(0; \pi]$ и являющейся четным продолжением f с $(0; \pi]$ на $[-\pi; 0)$, тригонометрический ряд

Фурье имеет вид $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$.

Из сходимости в среднем этого ряда на $[-\pi; \pi]$ к g следует, что на $[0; \pi]$ этот ряд сходится в среднем к f , т. е.

$$\int_0^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k a_n \cos nx \right)^2 dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

что показывает полноту системы $\varphi_i(x) = \cos(i-1)x$, $i \in \mathbb{N}$, в $\tilde{R}^2[0, \pi]$. Точно так же, только используя нечетное продолжение функции с $(0; \pi]$ на $[-\pi; 0)$, показывается полнота системы $\psi_i(x) = \sin ix$, $i \in \mathbb{N}$, на $\tilde{R}^2[0, \pi]$. Одновременно видно, что для рядов Фурье по каждой из этих систем сохраняется силу условие Дини поточечной сходимости. Коротко задачу разложения функции в ряд Фурье по этим системам, а также и полученных из них линейным переносом на отрезок $[0; l]$, формулируют так: найти разложение функции $f \in \tilde{R}^2[0, l]$ в ряд Фурье по косинусам (синусам) кратных углов. При этом коэффициенты искомого ряда находятся по формулам (4) или (5) соответственно, а четное или нечетное продолжение подразумевается.

Пример 12. Найти разложение функции $y = 2x - x^2$ по косинусам кратных углов на отрезке $[0; 2]$.

По общему правилу получаем, что

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^2 f(x) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}, \\ a_n &= \int_0^2 f(x) \cos \frac{\pi n x}{2} dx = \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[x \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 (1-x) \sin \frac{\pi n x}{2} dx \right] = \\ &= \frac{8}{\pi^2 n^2} \left[(1-x) \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 + \int_0^2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx \right] = \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{\pi^2 k^2}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

В силу условия Дирихле равенство

$$2x - x^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{(2n)^2}$$

верно для всех $x \in (0; 2)$. Из вышесказанного вытекает, что сумма равномерно сходящегося на всей числовой прямой ряда $\frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi n x}{n^2}$ равна функции $f^*(x)$, полученной из функции $f(x) = 2x - x^2$ сначала четным продолжением на $[-2; 0)$, а затем периодическим с периодом 4 продолжением на всю числовую прямую (рис. 9).

Пример 13. Найти разложение функции $y = \cos x$ по синусам кратных углов на отрезке $[0; \pi]$.

По общему правилу получаем, что для $n \neq 1$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \cdot \sin nx dx =$$

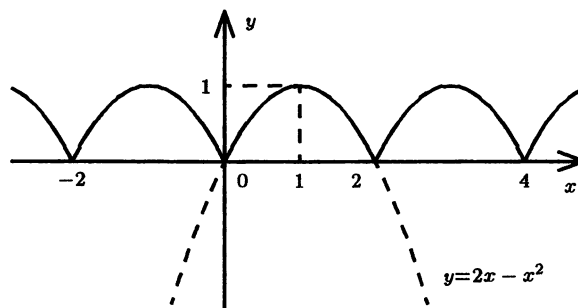


Рис. 9

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] dx = \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right] \Big|_0^{\pi} = \\
 &= \begin{cases} 0, & n = 2k-1, \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{4n}{\pi(n^2-1)}, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}; \\
 b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \cdot \sin x dx = 0.
 \end{aligned}$$

В силу условия Дини равенство $\cos x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2 - 1}$ верно для всех $x \in (0; \pi)$; если $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то непосредственно видно, что сумма полученного ряда равна

$$0 = \frac{\cos(0+0) + \cos(\pi-0)}{2}.$$

В заключение скажем о некоторых вопросах, выходящих за рамки курса математического анализа. Мы рассматривали представление интегрируемой с квадратом функции f рядом Фурье по системе, состоящей из тригонометрических функций. Справедливо утверждение, если тригонометриче-

ский ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right)$ сходится к функ-

ции $f \in \tilde{R}^2[-l, l]$ для всех $x \in [-l, l] \setminus M$, где M — не более чем счетное множество, то этот ряд есть ряд $\sigma_1(f)$ функции f . Таким образом, на множестве кусочно гладких функций представление функции ее рядом Фурье по системе $\{\varphi_i^{(l)}\}$ является единственно возможным представлением этой функции тригонометрическим рядом. В то же время сумма сходящегося всюду на $[-\pi; \pi]$ тригонометрического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ может быть функцией не интегрируемой с квадратом на $[-\pi; \pi]$ (и даже не входящей в класс $\tilde{R}[-\pi, \pi]$; см. задачи 22 и 23 гл. II § 5), т. е. такой ряд не является рядом Фурье никакой функции $f \in \tilde{R}^2[-\pi, \pi]$. Вопрос о характеристике класса функций, являющихся суммами всюду сходящихся тригонометрических рядов до сих пор не имеет полного решения.

Как показывает результат задачи 19 гл. II § 5, даже для непрерывных функций f ряд $\sigma(f)$ может расходиться в некоторых точках. Более того, известны примеры непрерывных функций f , для которых ряд $\sigma(f)$ расходится на множестве мощности континуума. В то же время известно, что для всех функций $f \in \tilde{R}^2[-\pi, \pi]$, в частности, для всех непрерывных на $[-\pi; \pi]$, ряд $\sigma(f)$ сходится к f для $x \in [-\pi; \pi] \setminus M$, где M — множество меры нуль. Но известны также примеры триго-

нометрических рядов $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$, содержащих

отличные от нуля коэффициенты и сходящихся к нулю всюду, кроме некоторого множества меры нуль. Таким образом, если требовать в задаче представления функции тригонометрическим рядом поточечную сходимость этого ряда к данной функции всюду или за исключением не более чем счетного множества, то задача не имеет решения даже для некоторых непрерывных функций. Если же ограничиться требованием сходимости всюду, кроме множества меры нуль, то задача решается неоднозначно.

§2. Суммирование тригонометрических рядов с помощью аналитических функций комплексного переменного

Пусть ряды

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cos mx, \quad \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin mx \quad (6)$$

сходятся на отрезке $[0; 2\pi]$ соответственно к $f(x)$ и $g(x)$, кроме быть может конечного множества точек. Рассмотрим степенной ряд с теми же коэффициентами, расположенный по степеням комплексной переменной z :

$$\frac{1}{2}q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} q_m z^m. \quad (7)$$

На окружности $|z| = 1$, т. е. при $z = e^{ix}$, этот ряд сходится, кроме, быть может, конечного множества точек. Следовательно, ряд (7) сходится всюду при $|z| < 1$ и его сумма

$$W(z) = W(re^{ix}) = \frac{1}{2}q_0 + \sum_{m=1}^{\infty} q_m z^m$$

при $0 \leq |z| = r < 1$ есть аналитическая функция. Тогда по второй теореме Абеля, если ряд (7) сходится, то

$$f(x) + ig(x) = \lim_{r \rightarrow 1} W(re^{ix}) = W(e^{ix}). \quad (8)$$

Найдя функцию W в явном виде и вычислив ее значение $W(e^{ix})$, тем самым найдем и суммы рядов (6).

Пример 1. Найти сумму рядов

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos mx}{m} \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin mx}{m}.$$

Решение. Первый ряд сходится для $x \neq 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, второй сходится для всех $x \in \mathbb{R}$. Оба ряда являются рядами Фурье для определяемых ими функций $f(x)$ и $g(x)$.

Рассмотрим ряд $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}$. Его сумма $\varphi(z)$ равна $-\ln(1-z)$, т. е. равна $\ln \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$. Следовательно,

$$f(x) + ig(x) = \ln \frac{1}{1 - e^{ix}}, \quad x \in (0; 2\pi).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - e^{ix}} &= \frac{1}{1 - \cos x - i \sin x} = \frac{1 - \cos x + i \sin x}{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} = \\ &= \frac{1}{2} + i \frac{\sin x}{2(1 - \cos x)} = \frac{1}{2} + i \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + i \cos \frac{x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) \right), \end{aligned}$$

то

$$\ln \frac{1}{1 - e^{ix}} = -\ln 2 \sin \frac{x}{2} + i \frac{\pi - x}{2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln 2 \sin \frac{x}{2}, \quad x \in (0; 2\pi), \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in (0; 2\pi). \end{aligned}$$

Отметим, что для применения изложенного выше метода обязательно надо быть уверенным в сходимости рядов (6), чтобы определять их сумму с помощью предельного перехода (8). Одно существование предела в правой части равенства (8) еще не позволяет сделать заключение о сходимости рядов (6). Для иллюстрации этого утверждения рассмотрим ряды

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos mx \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sin mx.$$

Эти ряда расходятся при $0 < x < 2\pi$, однако для соответствующего ряда

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}$$

при стремлении точки $z = re^{ix}$ по радиусу к точке e^{ix} на окружности имеем

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{1 - re^{ix}} - \frac{1}{2} &= \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1 - r \cos x - ir \sin x}{(1 - r \cos x)^2 + r^2 \sin^2 x} - \frac{1}{2} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \left[\left(\frac{1 - r \cos x}{1 + r^2 - 2r \cos x} - \frac{1}{2} \right) - \frac{ir \sin x}{1 + r^2 - 2r \cos x} \right] = \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \left[\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos x} - \frac{i \sin x}{1 + r^2 - 2r \cos x} \right] = \\ &= \frac{i \sin x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{i \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{2}, \quad x \neq 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти сумму рядов

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}$$

и

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

Решение. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}, \quad |z| \leq 1, \quad z \neq \pm i.$$

В теории функций комплексного переменного выводится, что сумма этого ряда равна $\operatorname{arctg} z$. Функция $w = \operatorname{tg} z$ не принимает значений $\pm i$ (проверьте!). Применяя формулы Эйлера, получаем, что при $z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-iz}}{e^{zi} + e^{-iz}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1}.$$

Уравнение $w = \frac{1}{i} \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1}$ разрешимо относительно z :

$$e^{2zi} = \frac{1 + wi}{1 - wi}, \quad z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1 + wi}{1 - wi},$$

т. е. получено выражение обратной многозначной функции $\operatorname{Arctg} w$.

Если для логарифма взять его главное значение, то получится главное значение арктангенса

$$\operatorname{arctg} w = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + wi}{1 - wi}, \quad w \neq \pm i, \quad (9)$$

которое характеризуется тем, что его вещественная часть содержится в промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$. Положим в формуле (9) $w = e^{ix}$, $0 \leq x \leq \pi$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{1 + ie^{ix}}{1 - ie^{ix}} &= \frac{1 - \sin x + i \cos x}{1 + \sin x - i \cos x} = \\ &= \frac{(1 - \sin x + i \cos x)(1 + \sin x + i \cos x)}{(1 + \sin x)^2 + \cos^2 x} = \frac{i \cos x}{1 + \sin x} = \\ &= i \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Так как модуль этого числа равен $\left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|$, а аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, если $x < \frac{\pi}{2}$, и $-\frac{\pi}{2}$, если $x > \frac{\pi}{2}$, то

$$\ln \frac{1 + zi}{1 - zi} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right| \pm \frac{\pi}{2} i$$

и

$$\operatorname{arctg} z = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|.$$

Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

и

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad x \neq \frac{\pi}{2}.$$

§3. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

Определение. Функция $f(x)$ называется *абсолютно интегрируемой* на $(-\infty; +\infty)$, если $f(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке $[-l; l]$, $l > 0$, и существует несобственный

интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$.

В этом случае будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит на прямой $(-\infty; +\infty)$ классу $\tilde{R}^1$ и писать $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)^*)$.

Определение. Пусть $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$. Интеграл

$$\int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda, \quad |x| < \infty, \quad (10)$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt \quad (11)$$

и

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt, \quad \lambda \in [0; +\infty), \quad (12)$$

называется интегралом Фурье функции $f(x)$ для любой $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$.

Отметим, что оба интеграла $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ существуют для любой функции $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$. Подставляя в (10) выражения (11) и (12) для $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, получим, что функции $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ сопоставляется интеграл Фурье

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt. \quad (13)$$

*) Аналогично определяется класс функций $\tilde{R}^1[0, +\infty)$

Как и в теории рядов Фурье, так и в теории интегралов Фурье основная проблема — это указать условия на функцию $f(x)$, при выполнении которых интеграл Фурье сходится к $f(x)$ или к $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

Теорема. (Признак Дини сходимости интеграла Фурье). Пусть $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ и в точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 \pm 0} f(x)$. Если в точке x_0 выполнены условия Дини, т. е. существует $h > 0$, такое, что несобственные интегралы

$$\int_0^h \frac{f(x_0+u) - f(x_0+0)}{u} du \quad \text{и} \quad \int_0^h \frac{f(x_0-u) - f(x_0-0)}{u} du$$

сходятся, то интеграл Фурье (13) для функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$.

Итак, теорема утверждает, что при выполнении условия Дини

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t - x_0) dt = \\ & = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)], & \text{если } x_0 \text{ — точка разрыва} \\ & \text{1 рода функции } f(x); \\ f(x_0), & \text{если } x_0 \text{ — точка непрерывности} \\ & \text{функции } f(x). \end{cases} \end{aligned}$$

Следствие. Пусть $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ и кусочно непрерывна на любом конечном отрезке. Пусть для любого $x \in (-\infty, +\infty)$ либо существует конечная производная, либо существуют конечные односторонние производные. Тогда интеграл Фурье (13) для функции $f(x)$ сходится всюду на $(-\infty, +\infty)$ к функции $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$.

Следствие. Пусть $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ и $f(x) \in C^1(-\infty, +\infty)$, тогда интеграл Фурье (4) для функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ на $(-\infty, +\infty)$.

Заметим, что для четной функции $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt \\ b(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

следовательно, ее интеграл Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x \, d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt, \quad |x| < \infty; \quad (15)$$

для нечетной функции $f(x)$ соответственно имеем

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x \, d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt, \quad |x| < \infty. \quad (16)$$

Если функция $f(x)$ определена в промежутке $[0; +\infty)$, $f(x) \in \tilde{R}^1[0, +\infty)$, то ее интеграл Фурье можно представить как в виде (15), так и в виде (16), доопределив на луч $x < 0$ в первом — четным, а во втором — нечетным образом.

Теорема. Пусть функция $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ и для любого $x \in (-\infty; +\infty)$ выполнены условия Дини, тогда

1) если функция $f(x)$ четная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x \, d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t \, dt, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

2) если функция $f(x)$ нечетная, то

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x \, d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t \, dt, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ — любое разбиение

нис отрезка $[a; b]$. Тогда величина $\bigvee_a^b f(x) = \sup_T \sum_{k=1}^m |\Delta f_k|$, где $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, называется полной вариацией функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Если $\bigvee_a^b f(x) < +\infty$, то в этом случае говорят, что функция $f(x)$ имеет в промежутке $[a; b]$ ограниченное изменение (или ограниченную вариацию).

Примером функции с ограниченным изменением может служить любая монотонная на отрезке $[a; b]$ функция. Укажем, кроме того, пример непрерывной функции

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

которая не является функцией с ограниченным изменением (проверьте!).

Классы функций с ограниченным изменением:

1. Если функция $f(x)$, заданная на промежутке $[a; b]$ такова, что этот промежуток может быть разложен на конечное число промежутков $[a_k; a_{k+1}]$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, $a_0 = a$, $a_m = b$, в каждом из которых $f(x)$ монотонна (такая функция называется кусочно-монотонной), то $f(x)$ имеет на $[a; b]$ ограниченное изменение.

2. Если функция $f(x)$ в промежутке $[a; b]$ удовлетворяет условию Липшица $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ (L — константа, $x_1, x_2 \in [a; b]$), то $f(x)$ имеет ограниченное изменение, причем

$$\bigvee_a^b f(x) \leq L(b-a).$$

3. Если $f(x)$ в промежутке $[a; b]$ имеет ограниченную производную: $|f'(x)| \leq L$, $x \in [a; b]$, то она имеет ограниченное изменение.

4. Если $f(x)$ в промежутке $[a; b]$ представима в виде интеграла

$$f(x) = C + \int_a^x \varphi(t) dt,$$

где $\varphi(t)$ предполагается абсолютно интегрируемой (хотя бы и в несобственном смысле) на $[a; b]$, то $f(x)$ имеет ограниченное изменение, причем

$$\bigvee_a^b f(x) \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt.$$

Свойства функций с ограниченным изменением:

1. Функция с ограниченным изменением ограничена.
2. Сумма, разность и произведение двух функций с ограниченным изменением на $[a; b]$ есть функция с ограниченным изменением на $[a; b]$.
3. Если $f(x)$ и $g(x)$ — функции с ограниченным изменением на $[a; b]$ и $|g(x)| \geq \alpha > 0$, то и частное $\frac{f(x)}{g(x)}$ есть функция с ограниченным изменением на $[a; b]$.
4. Если $f(x)$ имеет ограниченное изменение на $[a; b]$, то для любого $x \in [a; b]$ функция $g(x) = \bigvee_a^x f(t)$ будет монотонно возрастающей функцией, ограниченной на $[a; b]$; если $f(x)$ непрерывна в $x = x_0$, то и $g(x)$ непрерывна в x_0 .

Критерий для функций с ограниченным изменением. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела в промежутке $[a; b]$ ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в этом промежутке в виде разности двух монотонно возрастающих функций.

Для функции $f(x)$ с ограниченным изменением в промежутке $[a; b]$ в любой точке x_0 этого промежутка существуют конечные односторонние пределы.

Отметим, что непрерывная функция с ограниченным изменением представима в виде разности двух непрерывных возрастающих функций.

Теорема. (Признак Дирихле—Жордана сходимости интеграла Фурье). Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей прямой и в некотором интервале $[x_0 - h; x_0 + h]$, $h > 0$, функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение, тогда ин-

теграл Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$.

Пример 1. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < +\infty, \\ 0, & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

и нарисовать его график.

Решение. По определению интеграл Фурье $F(x)$ функции $f(x)$ равен:

$$F(x) = \int_0^{+\infty} (a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda,$$

где

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos \lambda t dt = \frac{\sin \lambda}{\pi \lambda};$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda t dt = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sin \lambda t dt = \frac{1}{\pi \lambda} (1 - \cos \lambda).$$

Следовательно,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left[\frac{\cos \lambda x \sin \lambda}{\pi \lambda} + \frac{(1 - \cos \lambda)}{\pi \lambda} \sin \lambda x \right] d\lambda$$

является искомым интегралом Фурье. Согласно общей теореме $F(x)$ имеет график, представленный на рис. 10 б.

Пример 2. Найти интеграл Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

а) продолжив ее четным образом; б) продолжив ее нечетным образом.

а) Если продолжение функции $f(x)$ четное, то имеем

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x d\lambda \int_0^1 \cos \lambda t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x \sin \lambda}{\lambda} d\lambda.$$

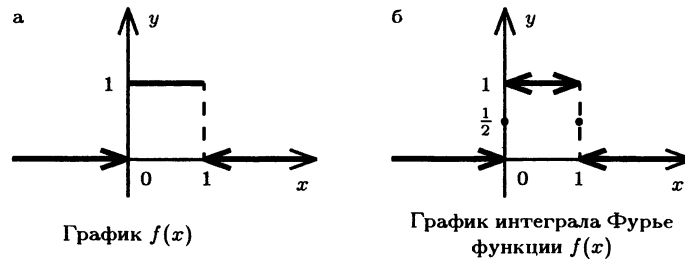


Рис. 10

Следовательно, в силу теоремы о сходимости интеграла Фурье имеем, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x \sin x}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & \text{при } |\lambda| < 1, \\ \pi/4, & \text{при } |\lambda| = 1, \\ 0, & \text{при } |\lambda| > 1. \end{cases}$$

б) Если продолжение нечетное, то

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \int_0^1 \sin \lambda t dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x (1 - \cos \lambda)}{\lambda} d\lambda,$$

откуда в силу теоремы о сходимости интеграла Фурье получаем, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda x (1 - \cos x)}{x} dx = \begin{cases} 0, & \text{при } |\lambda| > 1, \\ -\frac{1}{2}, & \text{при } |\lambda| = -1, \\ -1, & \text{при } -1 < \lambda < 0, \\ 0, & \text{при } \lambda = 0, \\ 1, & \text{при } 0 < \lambda < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } \lambda = 1. \end{cases}$$

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на $(-\infty; +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[-l; l]$, $l > 0$

Если существует $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T f(x) dx = A$, то он называется гла-

вным значением интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

В этом случае пишут:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T f(x) dx.$$

Заметим, что из существования несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ следует, что существует $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ и их значения совпадают.

Однако, обратное утверждение не имеет места, например, интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos x)}{x} dx$ не существуют как несобственные, но в смысле главного значения существуют и равны нулю.

В дальнейшем будем рассматривать комплекснозначные функции вещественного аргумента: $w(x) = u(x) + iv(x)$. Предел и непрерывность таких функций определяется обычным образом. Производная такой функции $w'(x)$ определяется формулой

$$w'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

Аналогично определяются интегралы: Римана, несобственный и интеграл в смысле главного значения, например,

$$\int_a^b w(x) dx = \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx.$$

Функция называется абсолютно интегрируемой, если абсолютно интегрируемы каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$. Справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b w(x) dx \right| < \int_a^b |w(x)| dx.$$

Теорема (формула Фурье для интеграла Фурье в комплексной форме). Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, $f \in C(-\infty, +\infty)$ и для любого $x \in (-\infty; +\infty)$ выполнены условия Дини.

Тогда интеграл Фурье для функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$ всюду и имеет место формула Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda(t-x)} dt \right] d\lambda \right), \quad |x| < \infty. \quad (17)$$

Заметим, что если кроме перечисленных выше условий на $f(x)$ функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \lambda(t-x) dt \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \lambda(t-x) dt, \quad |x| < \infty,$$

абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$, то внешний интеграл в (17) понимается в обычном смысле.

Преобразование Фурье.

Пусть функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$ и $f(x)$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$. Тогда, если для любого $x \in (-\infty; +\infty)$ выполнены условия Дини, то существует несобственный интеграл

$$F(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

и в силу формулы Фурье из теоремы Фурье имеем равенство

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \right)$$

для любого $x \in (-\infty; +\infty)$, где несобственный интеграл понимается в смысле главного значения.

Определение. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, тогда функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

называется преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначается $F[f]$ или $F(\lambda)$. Отметим, что хотя преобразование Фурье определено для абсолютно интегрируемой функции, но ее преобразование Фурье совсем не обязательно будет абсолютно интегрируемой функцией.

Пример 3. Найти преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\lambda \neq 0$, тогда

$$\begin{aligned} F[f] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-i\lambda x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\lambda x}}{-i\lambda} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\lambda a} - e^{i\lambda a}}{-i\lambda} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2 \frac{\sin \lambda a}{\lambda} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin \lambda a}{\lambda}. \end{aligned}$$

Если $\lambda = 0$, то

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2a = a \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Итак,

$$F[f] = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda a}{\lambda}, & \lambda \neq 0, \\ a \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Как известно, эта функция не является абсолютно интегрируемой на $(-\infty; +\infty)$. Выше было отмечено, что если $f(x)$ абсо-

лютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, непрерывна на $(-\infty; +\infty)$ и для нее выполнены условия Дини в любой точке $x \in (-\infty; +\infty)$, то из формулы Фурье получается формула обращения для преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \right), \quad |x| < \infty.$$

Надо отчетливо понимать разницу между “формулами”

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \quad |\lambda| < \infty,$$

и

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \right), \quad |x| < \infty.$$

Эти “формулы” различны по существу (а не знаком минус в показателе $\exp z$). Первая из них является не формулой, а определением, в котором несобственный интеграл существует в обычном смысле для $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, вторая — является формулой, которая доказывается при некоторых дополнительных условиях на $f(x)$ (например, $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет условию Дини) и в ней несобственный интеграл понимается в смысле главного значения.

Преобразование Фурье определено для функций, заданных на всей прямой. Иногда в физических задачах используют преобразование Фурье функций, заданных на $[0; +\infty)$. Заметим, что если $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ и $f(x)$ удовлетворяет условию Дини для всех $x \in (-\infty; +\infty)$, то в случае четной функции $f(x)$ имеет место формула Фурье

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad |x| < \infty,$$

а в случае нечетной функции $f(x)$ имеет место формула

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt, \quad |x| < \infty.$$

Поэтому, если непрерывная на $[0; +\infty)$ функция $f(x) \in \tilde{R}^1[0, +\infty)$, то ее можно непрерывно продолжить четным образом на $(-\infty; 0)$ по закону $f(-x) = f(x)$, а если $f(0) = 0$, то и нечетным образом на $(-\infty; 0)$ по закону $f(-x) = -f(x)$. Тогда при выполнении еще и условий Дини имеем для одной и той же функции формулу

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt, \quad x \in [0, +\infty), \quad (18)$$

или

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt, \quad x \in [0; +\infty). \quad (19)$$

Определение. Пусть $f(x) \in \tilde{R}^1[0, +\infty)$. Функция

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos \lambda t dt$$

называется косинус-преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначается $F_c[f]$ либо $F_c(\lambda)$.

Определение. Пусть $f(x) \in \tilde{R}^1[0, +\infty)$. Функция

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \lambda t dt$$

называется синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$ и обозначается $F_s[f]$ либо $F_s(\lambda)$.

Немедленно из этих определений и теоремы Фурье получаем формулы обращения для косинус-преобразования и синус-преобразования Фурье.

Теорема. Пусть $f(x) \in \tilde{R}^1[0, +\infty)$, $f(x) \in C[0, +\infty)$ и для любой точки $x \in [0; +\infty)$ выполнены условия Дини. Тогда имеет место формула обращения для косинус-преобразования Фурье:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad x \in [0; +\infty),$$

и если $f(0) = 0$, то имеет место и формула обращения для синус-преобразования Фурье:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_s(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda, \quad x \in [0; +\infty).$$

Отметим, что если $f(0) \neq 0$, то формула обращения для синус-преобразования Фурье имеет место для $x \in (0; +\infty)$. Сформулированные результаты используются для нахождения значений определенных интегралов.

Пример 4. Найти косинус- и синус-преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\beta x}$, $\beta > 0$, $x \geq 0$.

Решение. Согласно определению косинус-преобразования Фурье для функции $f(x) = e^{-\beta x}$ имеем:

$$F_c[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \cos \lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2}.$$

Согласно определению синус-преобразования Фурье для функции $f(x) = e^{-\beta x}$ имеем

$$F_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} \sin \lambda t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{\beta^2 + \lambda^2}.$$

Из полученных результатов следует, что

$$\begin{aligned} e^{-\beta x} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2} \cos \lambda x \, d\lambda = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\beta^2 + \lambda^2} \, d\lambda, \\ &\hspace{25em} x \geq 0, \\ e^{-\beta x} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\beta^2 + \lambda^2} \sin \lambda x \, d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{\beta^2 + \lambda^2} \, d\lambda, \\ &\hspace{25em} x > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем значения следующих интегралов Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2\beta} e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha \geq 0,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\beta^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta}, \quad \alpha > 0.$$

Пример 5. Рассмотрим интегральный логарифм

$$\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, \quad 0 < x < 1.$$

Отметим, что этот интеграл является собственным при любом $x \in (0; 1)$.

Положим $z = e^{-x}$, $x > 0$, и $t = e^{-u}$, тогда

$$\text{Li}(e^{-x}) = - \int_x^{+\infty} \frac{du}{ue^u}.$$

Отсюда видно, что функция $\text{Li}(x)$ непрерывно дифференцируема на $(0; 1)$ и функция

$$f(x) = \text{Li}(e^{-x}) \in C^1(0, +\infty).$$

Поскольку при $x > 1$ имеем $\int_x^{+\infty} \frac{du}{ue^u} < e^{-x}$, а при $0 < x < 1$ имеем $\int_x^1 \frac{du}{ue^u} < |\ln x|$, то $f(x) = \text{Li}(e^{-x})$ абсолютно интегрируема на $(0; +\infty)$.

Значит, справедливы обе формулы Фурье (18) и (19).

Найдем косинус-преобразование Фурье функции $y = \text{Li}(e^{-x})$:

$$\begin{aligned} F_c[\text{Li}(e^{-x})] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \text{Li}(e^{-z}) \cos zx \, dz = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos zx \, dz \int_z^{+\infty} \frac{du}{ue^u} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left(\frac{\sin zx}{x} \int_z^{+\infty} \frac{du}{ue^u} \right) \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin zx}{ze^z} dz \right] = \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-z} \frac{\sin zx}{z} dz.
\end{aligned}$$

Поскольку $\int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \arctg \frac{\alpha}{k}$, $\alpha > 0$ (см. пример 48 гл. I § 3), то

$$F_c[\text{Li}(e^{-x})] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\arctg x}{x}, \quad x > 0.$$

Применяя теорему обращения, находим значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg z}{z} \cos zx \, dz = -\frac{\pi}{2} \text{Li}(e^{-x}), \quad x > 0.$$

Аналогичным образом, используя синус-преобразование Фурье, найдем значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+z^2)}{z} \sin zx \, dz = -\pi \text{Li}(e^{-x}), \quad x > 0.$$

Пример 6. Найти косинус-преобразование Фурье функции $y = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$.

Решение. Рассмотрим косинус-преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1 - e^{-\beta x}}{x}$, $\beta \geq 0$. Имеем

$$F_c(\lambda, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x} \cos \lambda x \, dx.$$

Для вычисления этого интеграла применим дифференцирование по β под знаком интеграла:

$$\frac{\partial F_c(\lambda, \beta)}{\partial \beta} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \lambda x \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda^2}, \quad \beta \neq 0,$$

откуда

$$F_c(\lambda, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \ln(\beta^2 + \lambda^2) + C, \quad \beta \neq 0.$$

Так как $F_c(\lambda, \beta)$ непрерывна в точке $\beta > 0$ и при $\beta = 0$ $F_c(\lambda, 0) = 0$, то $C = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \ln \lambda^2$. Итак,

$$F_c(\lambda, \beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ln \frac{\sqrt{\beta^2 + \lambda^2}}{\lambda}.$$

Отсюда при $\beta = 1$ находим

$$F_c(\lambda, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

Используя теорему обращения косинус-преобразования Фурье при $\lambda \geq 0$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda,$$

находим, что косинус-преобразование Фурье функции $y = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$ равно $\sqrt{2\pi} f(\lambda, 1)$, т. е. равно $\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}$. Для обоснования законности применения теоремы обращения косинус-преобразования Фурье и теоремы дифференцирования по параметру заметим, что функция

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-\beta x}}{x}, & x \neq 0, \\ -\beta, & x = 0, \end{cases}$$

абсолютно интегрируема на $[0; +\infty)$, непрерывна и имеет непрерывную производную и интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \lambda x dx$ сходится равномерно на множестве $\beta \geq \varepsilon > 0$. Следовательно, дифференцирование по параметру законно для любого $\beta > 0$.

Определение. Пусть $\varphi(x)$ определена на $(-\infty; +\infty)$. Обратным преобразованием Фурье функции $\varphi(x)$ называется функция

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \right),$$

если главное значение несобственного интеграла существует.

Обратное преобразование Фурье функции $\varphi(x)$ обозначается $F^{-1}[\varphi]$.

Заметим, что если $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, то обратное преобразование Фурье существует

$$\text{и} \quad F^{-1}[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

(несобственный интеграл существует в обычном смысле).

Теорема обращения (для преобразования Фурье и для обратного преобразования Фурье). Пусть $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ и для любого $x \in (-\infty; +\infty)$ выполнены условия Дини. Тогда имеют место равенства

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Справедливы следующие свойства преобразования Фурье:

1. $F[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 F[f_1] + \alpha_2 F[f_2]$ — линейность преобразования Фурье.

2. Пусть C_D — множество непрерывных на $(-\infty; +\infty)$ функций, абсолютно интегрируемых на $(-\infty; +\infty)$ и удовлетворяющих условию Дини в любой точке $x \in (-\infty; +\infty)$; тогда

$$F[f_1] = F[f_2] \iff f_1 \equiv f_2, \quad f_i \in C_D, \quad i = 1, 2.$$

3. Пусть $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, тогда

1) $F(\lambda) \in C(-\infty, +\infty)$;

2) $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |F(\lambda)| = 0$;

3) $|F(\lambda)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt.$

4. Пусть $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, $f'(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, тогда $F[f'] = i\lambda F[f]$.

5. Пусть $f(x) \in D^k(-\infty, +\infty)$, $D^l f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, $1 \leq l \leq k$, $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$F[f^{(l)}] = (i\lambda)^l F[f], \quad 1 \leq l \leq k.$$

6. Пусть $f(x) \in D^k(-\infty, +\infty)$ и $D^l f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ для всех $1 \leq l \leq k$; тогда при $|\lambda| \rightarrow \infty$

$$|F(\lambda)| = o\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right).$$

7. Если $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$, то $F[f]$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$.

8. Если $f(x) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$ и $D^l f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ при любом l , то

$$F[f^{(l)}] \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$$

при любом l , причем $|F[f^{(l)}]|$ убывает при $|\lambda| \rightarrow +\infty$ быстрее любой степени $\frac{1}{|\lambda|^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

9. Пусть $f(x)$ и $xf(x)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$. Тогда

$$F[f] \in C^1(-\infty, +\infty), \quad \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |(F[f])'| = 0,$$

причем

$$(F[f])'_\lambda = F[-ixf(x)].$$

10. Пусть $x^l f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ при $l = 0, 1, 2, \dots, k$. Тогда

$$F[f] \in C^k(-\infty, +\infty), \quad \lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |D^l F[f]| = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, k,$$

причем

$$(F[f])^{(l)} = F[(-ix)^l f(x)], \quad l = 0, 1, 2, \dots, k.$$

Определение. Пусть

$$f_1(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty), \quad f_2(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty).$$

Функция

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt \quad (20)$$

называется сверткой функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, если этот интеграл существует.

Свертка функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ обозначается $f_1 * f_2$, т. е.

$$f_1 * f_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt.$$

Теорема (достаточное условие существования свертки функций). Пусть $f_1(x), f_2(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ и функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничены на всей прямой; тогда существует свертка функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и несобственный интеграл (20) сходится равномерно на $(-\infty; +\infty)$.

Пример 7. Найти свертку функций

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{-ax^2}, \quad a > 0, \\ f_2(x) &= e^{-bx}, \quad b > 0. \end{aligned}$$

Решение.

$$\begin{aligned} f_1 * f_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} \cdot e^{-b(x-t)} dt = \frac{e^{-bx}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2+bt} dt = \\ &= \frac{e^{-bx}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(t-\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a}} dt = \frac{e^{-bx-\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{e^{-bx-\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{2a}}. \end{aligned}$$

Теорема. Пусть

$$f_1(x), f_2(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty), \quad f_1(x), f_2(x) \in C(-\infty, +\infty),$$

и функции $f_1(x), f_2(x)$ ограничены на всей прямой. Тогда:

- 1) $f_1 * f_2 \in C(-\infty, +\infty)$;
- 2) существует $M > 0$, такое, что $|f_1 * f_2| \leq M$;
- 3) $f_1 * f_2 \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$.

Итак, теорема утверждает, что свертка двух функций $f_1(x)$

и $f_2(x)$, ограниченных, непрерывных и абсолютно интегрируемых на $(-\infty; +\infty)$, является функцией, обладающей теми же свойствами.

Рассматривая операцию свертки на классе абсолютно интегрируемых непрерывных и ограниченных функций на $(-\infty; +\infty)$, можно показать, что

- 1) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$;
- 2) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$.

Так как для таких функций свертка абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$, то существует преобразование Фурье свертки.

Теорема о преобразовании Фурье свертки. Пусть $f_1(x), f_2(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, $f_1(x), f_2(x) \in C(-\infty, +\infty)$, и функции $f_1(x), f_2(x)$ ограничены на $(-\infty; +\infty)$. Тогда существует преобразование Фурье свертки и

$$F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2].$$

Из свойств преобразования Фурье (п. 6) следует, что при переходе от функции $f(x)$ к ее преобразованию Фурье степень гладкости функции и скорость ее убывания на бесконечности меняются ролями. Естественно найти такие классы функций из $\tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$, которые переводятся преобразованием Фурье сами в себя.

Определение. Скажем, что функция $f(x)$ принадлежит классу S , если

$$f(x) \equiv u(x) + iv(x) \in C^\infty(-\infty, +\infty)$$

и для любых k и l , $k = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots$, существует постоянная $C_{k,l}$ (зависящая как от функции $f(x)$, так и от чисел k и l), такая, что

$$(1 + |x|)^k |f^{(l)}(x)| \leq C_{k,l}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Для любой функции $f(x) \in S$ имеем при $k \geq 2$

$$|f^{(l)}(x)| \leq \frac{C_{k,l}}{(1 + |x|)^k} \leq \frac{C_{k,l}}{(1 + |x|)^2}, \quad l = 0, 1, \dots,$$

откуда следует, что $f^{(l)}(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ и, в частности, $f(x) \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$. Это означает, что $S \subset \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$.

Теорема. Рассмотрим пространство функций S и пусть $F[f] \equiv \hat{f}$ преобразование Фурье функции $f(x) \in S$. Тогда отображение $F: f \rightarrow \hat{f}$ определено на S , причем $F(S) = S$ и отображение $F: S \rightarrow S$ биективно.

Заметим, что если $f(x) \in S$, то в силу свойств преобразования Фурье имеем:

1. $F[f^{(l)}(x)] = (i\lambda)^l F[f]$,
2. $F[x^l f(x)] = i^l (F[f])^{(l)}$.

3. Существует обратное преобразование Фурье

$$F^{-1}[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad |x| < \infty,$$

где несобственный интеграл сходится абсолютно.

Теорема (формула обращения). Если $f(x) \in S$, то имеет место формула обращения преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F[f] e^{i\lambda x} d\lambda, \quad |x| < \infty,$$

причем, поскольку $f(x)^{(l)} \in \tilde{R}^1(-\infty, +\infty)$ для любого $l \geq 0$, то несобственный интеграл понимается в обычном смысле и сходится абсолютно и равномерно по x на $(-\infty; +\infty)$.

Для функций из класса S справедлива и следующая теорема о свертке функций.

Теорема (о свойствах свертки в S). Пусть $f_1(x) \in S$, $f_2(x) \in S$. Тогда существует свертка $f_1 * f_2$, причем

- 1) $f_1 * f_2 \in S$;
- 2) $F[f_1 * f_2] = F[f_1] \cdot F[f_2]$;
- 3) $F[f_1 \cdot f_2] = F[f_1] * F[f_2]$.

Теорема (равенство Парсеваля в S). Пусть $f_1(x) \in S$, $f_2(x) \in S$. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} F[f_1] \cdot f_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) F[f_2] dy;$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) \bar{f}_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F[f_1] \cdot \overline{F[f_2]} dy$$

в частности, $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (F[f])^2 dx$ для любой функции $f(x) \in S$.

Следствием этой теоремы является следующий результат:

Пусть функция $f(x)$ и ее вторая производная абсолютно интегрируемы на $(-\infty; +\infty)$, $f(x) \rightarrow 0$ и $f'(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Пусть функция $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty; +\infty)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F[f] \cdot \overline{F[\varphi]} d\lambda.$$

§4. Упражнения

Разложить функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на заданном отрезке. В примерах 3, 8, 9, 10, 11, 28, 29, 32, 34 указать функцию $g(x)$, к которой сходится полученный ряд.

$$1) f(x) = x \sin x \text{ на } [-\pi; \pi]. \quad 2) f(x) = x \cos x \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$3) f(x) = \begin{cases} bx, & -\pi < x \leq 0, \\ ax, & 0 < x < \pi, \end{cases} \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$4) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \end{cases} \text{ на } [0; \pi].$$

$$5) f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < \pi, \end{cases} \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$6) f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \text{ на } [-1; 1].$$

$$7) f(x) = x^2 \text{ на } [-\pi; \pi]. \quad 8) f(x) = x^2 \text{ на } [0; 2\pi].$$

$$9) f(x) = x^2 \text{ на } [0; \pi].$$

$$10) f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x < \pi, \\ -x^2, & -\pi < x < 0, \end{cases} \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$11) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x^2, & 0 < x < \pi, \end{cases} \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$12) f(x) = \begin{cases} a, & |x| < h, \\ 0, & h \leq |x| \leq \pi, \end{cases} \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$13) f(x) = \begin{cases} a, & 0 < x < h, \\ 0, & h \leq x \leq 2\pi, \end{cases} \text{ на } [0; 2\pi].$$

$$14) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2h}, & |x| \leq h, \\ 0, & h \leq |x| \leq \pi, \end{cases} \quad h \neq \frac{\pi}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$15) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{h}, & 0 \leq x < h, \\ 0, & h \leq x \leq 2\pi, \end{cases} \quad h \neq \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ на } [0; 2\pi].$$

$$16) f(x) = \operatorname{sign}(\sin x) \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$17) f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi, \end{cases} \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$18) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1 + \cos \frac{1}{2}x, & \pi < x \leq 2\pi, \end{cases} \text{ на } [0; 2\pi].$$

$$19) f(x) = \begin{cases} 0, & \frac{\pi}{2} \leq |x| \leq \pi, \\ \cos x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$20) f(x) = \begin{cases} -\sin x, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases} \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$21) f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ \frac{x^2}{\pi}, & 0 < x \leq \pi, \end{cases} \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$22) f(x) = \sin^5 x \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$23) f(x) = \cos^4 x \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$24) f(x) = \arcsin(\cos x) \text{ на } [-10\pi; 10\pi].$$

$$25) f(x) = \arcsin(\sin x) \text{ на } [6\pi; 20\pi].$$

$$26) f(x) = \operatorname{ch} x \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$27) f(x) = \operatorname{sh} x \text{ на } [-\pi; \pi].$$

$$28) f(x) = \sin x \text{ на } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$29) f(x) = \cos x \text{ на } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$30) f(x) = \cos x \text{ на } [0; \pi].$$

$$31) f(x) = \begin{cases} -1, & -c < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < c, \end{cases} \text{ на } [-c; c].$$

$$32) f(x) = \begin{cases} 0, & -c < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < c, \end{cases} \text{ на } [-c; c].$$

$$33) f(x) = x \text{ на } [-c; c].$$

$$34) f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq c, \\ 0, & -c < x \leq 0, \end{cases} \text{ на } [-c; c].$$

$$35) f(x) = |x| \text{ на } [-c; c].$$

- 36) $f(x) = x - [x]$ на $[0; 3]$. 37) $f(x) = x^2$ на $[-1; 1]$.
 38) $f(x) = x^2$ на $[0; 2]$. 39) $f(x) = c^2 - x^2$ на $[-c; c]$.
 40) $f(x) = x(c^2 - x^2)$ на $[-c; c]$. 41) $f(x) = (c^2 - x^2)^2$ на $[-c; c]$.
 42) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ -\cos x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right], \end{cases}$ на $[0; \pi]$.
 43) $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, на $[-\pi; \pi]$.
 44) $f(x) = \cos ax$, a — не целое, на $[-\pi; \pi]$.
 45) $f(x) = x^2 \cos x$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном отрезке по косинусам кратных дуг.

- 46) $f(x) = \sin x$ на $[0; \pi]$. 47) $f(x) = x \cos x$ на $[0; \pi]$.
 48) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ 2x - l, & \frac{l}{2} < x \leq l, \end{cases}$ на $[0; l]$.
 49) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2h}, & 0 \leq x \leq 2h, \\ 0, & 2h < x \leq \pi, \end{cases}$ на $[0; \pi]$.
 50) $f(x) = e^{ax}$ на $[0; \pi]$. 51) $f(x) = \sin ax$ на $[0; \pi]$.
 52) $f(x) = \operatorname{ch} ax$ на $[0; \pi]$.

Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье на заданном отрезке по синусам кратных дуг.

- 53) $f(x) = \cos x$ на $[0; \pi]$. 54) $f(x) = x \sin x$ на $[0; \pi]$.
 55) $f(x) = \begin{cases} \frac{hx}{c}, & 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h}{l-c}(l-x), & c < x \leq l, \end{cases}$ на $[0; l]$, $0 < c < l$.
 56) $f(x) = e^{ax}$ на $[0; \pi]$.
 57) $f(x) = \sin ax$, a — не целое, на $[0; \pi]$.
 58) $f(x) = \operatorname{sh} ax$ на $[0; \pi]$.

Пользуясь формулами

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

разложить в тригонометрический ряд Фурье следующую функцию

$$59) y = \cos^{2m} x, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$60) y = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2}, \quad |q| < 1.$$

$$61) y = \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos x + q^2}, \quad |q| < 1.$$

$$62) y = \frac{1 - q \cos x}{1 - 2q \cos x + q^2}, \quad |q| < 1.$$

Разложить в тригонометрический ряд Фурье следующую неограниченную периодическую функцию

$$63) y = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|, \quad 64) y = \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right|.$$

$$65) y = \int_0^x \ln \sqrt[3]{\left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|} dt, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

66) Как следует продолжить заданную в интервале $(0; \frac{\pi}{2})$ непрерывную функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi; \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x, \quad -\pi < x < \pi.$$

67) Как следует продолжить заданную в интервале $(0; \frac{\pi}{2})$ непрерывную функцию $f(x)$ в интервал $(-\pi; \pi)$, чтобы ее разложение в ряд Фурье имело вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x, \quad -\pi < x < \pi.$$

68) Пользуясь разложением функции $y = \operatorname{sign} x$, $-\pi < x < \pi$, в тригонометрический ряд Фурье, найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}.$$

69) Пользуясь разложением функции $y = x^2$ в ряд Фурье

- 1) по синусам кратных дуг,
- 2) по косинусам кратных дуг,
- 3) в интервале $(0; 2\pi)$,

найти суммы

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

70) Пользуясь разложением функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ в тригонометрический ряд Фурье на промежутке $(0; 2\pi)$, получить разложения

$$\text{а) } \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}, \quad 0 < x < \pi;$$

$$\text{б) } \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad 0 < x < \pi.$$

71) Найти сумму ряда, используя результат задачи 70:

$$\text{а) } 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots;$$

$$\text{б) } 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \dots;$$

$$\text{в) } 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots.$$

72) Написать равенство Парсеваля для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha, \\ 0, & 0 < |x| < \pi, \end{cases}$$

и, исходя из этого равенства, найти сумму ряда

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

73) Исходя из разложения

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \quad |x| < \pi,$$

и результатов, изложенных в примере 11, почленным интегрированием получить разложение в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\pi; \pi)$ функции

$$\text{а) } x^2 + 2x; \quad \text{б) } x^3 + x^2; \quad \text{в) } x^4.$$

74) Доказать справедливость равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^4} = \frac{1}{96} \pi(\pi-2x)(\pi^2+2\pi x-2x^2), \quad x \in [0; \pi].$$

75) Используя разложение функций $y = x$ и $y = x^2$ в ряд Фурье по косинусам кратных дуг, получить формулу

$$\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0; 2\pi].$$

76) Исходя из разложения $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $0 < x < 2\pi$, получить формулу для $-\infty < x < +\infty$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n} = \begin{cases} x - E(x), & x \text{ — нецелое,} \\ \frac{1}{2}, & x \text{ — целое,} \end{cases}$$

где $E(x)$ — целая часть числа x .

77) Исходя из разложения функции $y = \cos ax$ в ряд Фурье (см. задачу 44), получить формулу

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{1}{\sin a\pi} &= \frac{1}{a\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi(-1)^n}{(a\pi)^2 - (\pi n)^2}, \quad a \text{ не целое;} \\ \text{б) } \frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{z - \pi n} + \frac{1}{z + \pi n} \right], \quad z \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ \text{в) } \operatorname{ctg} z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - \pi n} + \frac{1}{z + \pi n} \right], \quad z \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

78) Исходя из разложений функций $y = \operatorname{ch} ax$ и $y = \operatorname{sh} ax$ в ряд Фурье (см. задачи 26 и 27), получить формулу

$$\text{а) } \frac{1}{\operatorname{sh} z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z}{z^2 + \pi^2 n^2};$$

$$б) \operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + \pi^2 n^2}, \quad z \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

79) Доказать формулы:

$$а) \cos x - \frac{\cos 5x}{5} + \frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 11x}{11} + \dots =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x = \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}, \\ -\frac{\pi}{4\sqrt{3}}, & x = \frac{2\pi}{3}, \\ -\frac{\pi}{2\sqrt{3}}, & \frac{2\pi}{3} < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$б) \sin x - \frac{\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 7x}{7^2} - \frac{\sin 11x}{11^2} + \dots =$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{3}}x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}, \\ \frac{\pi^2}{6\sqrt{3}}, & \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(\pi - x), & \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$в) \frac{1}{4} \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \sin nx = \sin x \cdot \ln 2 \cos \frac{x}{2}, \quad |x| < \pi.$$

$$г) \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 - 1} \cos nx = \cos x \cdot \ln 2 \cos \frac{x}{2}, \quad |x| < \pi.$$

Найти сумму ряда.

$$80) а) 1 + \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 2x}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\cos nx}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} + \dots,$$

$$б) \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{\sin nx}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} + \dots.$$

$$81) \text{ а) } \frac{\cos x}{1!} - \frac{\cos 3x}{3!} + \frac{\cos 5x}{5!} - \dots, \quad \text{б) } \frac{\sin x}{1!} - \frac{\sin 3x}{3!} + \frac{\sin 5x}{5!} - \dots.$$

$$82) \text{ а) } 1 - \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 4x}{4!} - \dots, \quad \text{б) } \frac{\sin 2x}{2!} - \frac{\sin 4x}{4!} + \frac{\sin 6x}{6!} - \dots.$$

$$83) \text{ а) } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n(n+1)}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

$$84) \text{ а) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2 - 1}, \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^2 - 1}.$$

$$85) \text{ а) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1} \cos nx, \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1} \sin nx.$$

$$86) \text{ а) } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{(n+1)(n+2)}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{(n+1)(n+2)}.$$

$$87) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{n}.$$

$$88) \text{ а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n-1)n}, \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{(n-1)n(n+1)}.$$

$$89) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)2n}.$$

$$90) \text{ а) } \cos x + \frac{1}{2} \frac{\cos 3x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos 5x}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\cos 7x}{7} + \dots,$$

$$\text{б) } \sin x + \frac{1}{2} \frac{\sin 3x}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin 5x}{5} + \dots.$$

$$91) \text{ а) } \frac{\cos x}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{\cos 3x}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\cos 5x}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\cos 7x}{7 \cdot 8} + \dots,$$

$$\text{б) } \frac{\sin x}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \frac{\sin 3x}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin 5x}{5 \cdot 6} + \dots.$$

Доказать равенства.

$$92) \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x, \quad 0 < x < \pi.$$

$$93) \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots = \frac{\pi x}{8}(\pi - x), \quad 0 < x < \pi.$$

$$94) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+2)\varphi}{n(n+1)} = \sin 2\varphi - (\pi - 2\varphi) \sin^2 \varphi - \\ - \sin \varphi \cos \varphi \cdot \ln(4 \sin^2 \varphi), \quad 0 < x < \pi.$$

$$95) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{n^2(n+1)^2} = 2(\pi - 2\varphi) \sin \varphi + \\ + \left(\frac{\pi^2}{3} - 2\pi\varphi + 2\varphi^2 - 3 \right) \cos \varphi, \quad 0 < x < \pi.$$

$$96) \frac{\cos 3x}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{\cos 5x}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{\cos 7x}{5 \cdot 7 \cdot 9} - \dots = \frac{\pi}{8} \cos^2 x - \frac{1}{3} \cos x, \quad 0 < x < \pi.$$

$$97) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} + \frac{\cos x}{4} - \frac{\pi - x}{2} \sin x, \quad 0 < x < 2\pi.$$

$$98) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 - 1} = \sin x \left(\frac{1}{4} - \ln \left(2 \sin \frac{x}{2} \right) \right), \quad 0 < x < 2\pi.$$

$$99) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^2} [\pi - x - \pi \operatorname{ch} ax + \pi \operatorname{cth} a\pi \cdot \operatorname{sh} ax], \\ 0 < x < \pi.$$

$$100) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n(n^2 + a^2)} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\pi \operatorname{sh} ax}{2 \operatorname{sh} \pi a} - \frac{x}{2} \right), \quad -\pi < x < \pi.$$

$$101) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^4 - 4} = \frac{1}{8} \left[1 - \frac{\pi \cos(x\sqrt{2})}{\sqrt{2} \sin(\pi\sqrt{2})} - \frac{\pi \operatorname{ch}(x\sqrt{2})}{\sqrt{2} \operatorname{sh}(\pi\sqrt{2})} \right], \\ -\pi < x < \pi.$$

Разложив функцию $f(x)$ в ряд Фурье, вычислить интеграл $\int_a^b f(x) dx$. Использовать следующие разложения:

$$\frac{1 - a \cos bx}{1 - 2a \cos bx + a^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nbx, \quad |a| < 1;$$

$$\frac{a \sin bx}{1 - 2a \cos bx + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nbx, \quad |a| < 1;$$

$$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos bx + a^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nbx, \quad |a| < 1.$$

$$102) \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

$$103) \int_0^{\pi} \cos nx \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$104) \int_0^{\pi} \frac{\ln \sin x dx}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad 105) \int_0^{2\pi} \frac{\sin mx dx}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$106) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2} dx.$$

$$107) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2} \cdot \frac{\sin bx}{1 - 2a \cos bx + a^2}, \quad b > 0.$$

$$108) \int_0^{\pi} \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx, \quad 109) \int_0^{\pi} \frac{x dx}{1 - 2a \cos 2x + a^2}.$$

$$110) \int_0^{2\pi} \frac{x^2 \sin x dx}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad 111) \int_0^{2\pi} \frac{x \cos mx dx}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$112) \int_0^{\pi} \frac{\sin mx \sin x dx}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad 113) \int_0^{\pi} \frac{\ln \sin x dx}{1 - a \cos x}, \quad |a| < 1.$$

$$114) \int_0^{\pi} \frac{\cos mx dx}{1 - a \cos x}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad |a| < 1.$$

$$115) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mx}{1 - 2a \cos x + a^2} dx, \quad m \in \mathbb{N}, |a| < 1.$$

$$116) \int_0^{2\pi} \frac{\sin mx \, dx}{1 - a \cos x}, \quad m \in \mathbb{N}, |a| < 1.$$

$$117) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x \, dx}{1 - a \cos x}, \quad |a| < 1.$$

$$118) \int_0^{\pi} \ln(1 - a \cos x) \, dx, \quad |a| < 1.$$

$$119) \int_0^{\pi} \cos nx \cdot \ln(1 - a \cos x) \, dx, \quad |a| < 1.$$

$$120) \int_0^{2\pi} \frac{x \, dx}{1 - a \cos 2x}, \quad |a| < 1.$$

$$121) \int_0^{2\pi} \frac{x \cos mx \, dx}{1 - a \cos x}, \quad |a| < 1, m \in \mathbb{N}.$$

$$122) \int_0^{2\pi} \frac{x^2 \sin x \, dx}{1 - a \cos x}, \quad |a| < 1.$$

$$123) \int_0^{\pi} \frac{\sin mx \cdot \sin x \, dx}{1 - a \cos x}, \quad m \in \mathbb{N}, |a| < 1.$$

$$124) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx \, dx}{(1 + x^2)(1 - a \cos bx)}, \quad |a| < 1, b > 0.$$

$$125) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)(1 - a \cos bx)}, \quad |a| < 1, b > 0.$$

Найти интеграл Фурье $F(x)$ функции $f(x)$. Построить график функции $F(x)$.

$$126) f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad 127) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$128) f(x) = \begin{cases} e^{-\beta x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$129) f(x) = \begin{cases} h \left(1 - \frac{|x|}{a} \right), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

$$130) f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad a > 0. \quad 131) f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$$

$$132) f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leq \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases} \quad 133) f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$134) f(x) = \operatorname{sign}(x - a) - \operatorname{sign}(x - b), \quad b > a.$$

$$135) f(x) = \begin{cases} A \sin \omega x, & |x| \leq \frac{2\pi n}{\omega}, \\ 0, & |x| > \frac{2\pi n}{\omega}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$136) f(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0.$$

$$137) f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -e^{\alpha x}, & x < 0, \end{cases} \quad \alpha > 0.$$

$$138) f(x) = e^{-\alpha|x|} \cos \beta x, \quad \alpha > 0.$$

$$139) f(x) = e^{-\alpha|x|} \sin \beta x, \quad \alpha > 0.$$

$$140) f(x) = e^{-x^2}.$$

$$141) f(x) = x e^{-x^2}.$$

Найти преобразование Фурье функции $f(x)$.

$$142) f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$143) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & -\infty < x \leq 0 \cup 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

$$144) f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad 145) f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1, \\ 1, & 1 < |x| < 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

$$146) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 < |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases} \quad 147) f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$148) f(x) = \begin{cases} x \cos x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \quad 149) f(x) = \begin{cases} e^{-x} \cos x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$150) f(x) = e^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0. \quad 151) f(x) = xe^{-\alpha|x|}, \quad \alpha > 0.$$

$$152) f(x) = e^{-|x|} \cos \omega x. \quad 153) f(x) = e^{-|x|} \sin \omega x.$$

$$154) f(x) = e^{-\alpha^2 x^2}. \quad 155) f(x) = xe^{-x^2}.$$

$$156) f(x) = e^{-2|x-1|}. \quad 157) f(x) = (2x+1)e^{-|x|}.$$

$$158) f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}. \quad 159) f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \alpha x.$$

$$160) f(x) = \frac{\sin x}{1+x^4}. \quad 161) f(x) = \frac{x \cos x}{(1+x^2)^2}.$$

Найти синус-преобразование Фурье функции $f(x)$.

$$162) f(x) = \begin{cases} 4x-1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & x > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$163) f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{1}{2}, & x = a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

$$164) f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

$$165) f(x) = 5^{-x}. \quad 166) f(x) = x^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

$$167) f(x) = \frac{e^{-x}}{x}. \quad 168) f(x) = e^{-x^2/2}.$$

- 169) $f(x) = \frac{1}{e^{2\pi x} + 1}$. 170) $f(x) = \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi x} - 1}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}$.
- 171) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} \pi x}$. 172) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} (x\sqrt{\frac{\pi}{2}})} - \frac{1}{x\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$.
- 173) $f(x) = \begin{cases} x(1-x^2)^{\nu-3/2}, & 0 < x < 1, \nu > 1/2, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$
- 174) $f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{\nu-1/2}, & 0 < x < 1, \nu > -3/2, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$
- 175) $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$. 176) $f(x) = \frac{x}{a^2+x^2}$.
- 177) $f(x) = \frac{1}{x(x^2+b^2)}$. 178) $f(x) = \frac{1}{x(x^2+b^2)^2}$.
- 179) $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$.
- 180) $f(x) = \frac{J_{3/2}(x)}{\sqrt{x}}$, $J_{3/2}$ — функция Бесселя (см. гл. III § 6).

Найти косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$.

- 181) $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & 0 \leq x \leq 3/2, \\ 0, & x > 3/2. \end{cases}$
- 182) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$
- 183) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$
- 184) $f(x) = 2^{-x}$. 185) $f(x) = x^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.
- 186) $f(x) = \frac{1 - e^{-\beta x}}{x}$, $\beta \geq 0$. 187) $f(x) = e^{-x^2}$.
- 188) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. 189) $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.
- 190) $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$. 191) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
- 192) $f(x) = \frac{x \sin \pi x}{1-x^2}$.

193) $f(x) = \frac{J_{1/2}(x)}{\sqrt{x}}$, $J_{1/2}$ — функция Бесселя (см. гл. III § 6).

194) $f(x) = \frac{J_{3/2}(x)}{\sqrt{x}}$, $J_{3/2}$ — функция Бесселя (см. гл. III § 6).

195) Доказать, что для четной функции преобразование Фурье есть ее же косинус-преобразование Фурье.

196) Доказать, что для нечетной функции ее преобразование Фурье удовлетворяет соотношению $F(\lambda) = iF_s(\lambda)$.

197) Доказать, что если $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ — четная функция, а $\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ — нечетная функция, то

$$F(\lambda) = F_{c,\varphi}(\lambda) + iF_{s,\psi}(\lambda),$$

где $F_{c,\varphi}(\lambda)$ — косинус-преобразование Фурье функции $\varphi(x)$, $F_{s,\psi}(\lambda)$ — синус-преобразование Фурье функции $\psi(x)$.

198) Функция $f(x)$ называется двойственной себе при данном интегральном преобразовании, если после преобразования ее вид не меняется, а заменяется только аргумент x на λ . Доказать, что функция $f(x)$ двойственна себе как при косинус-преобразовании Фурье, так и при синус-преобразовании Фурье, если

$$\text{а) } f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

199) Доказать, что функция $f(ax)$, $a > 0$, имеет косинус-преобразование Фурье $\frac{1}{a}F_c\left(\frac{\lambda}{a}\right)$, где $F_c(\lambda)$ — косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$.

200) Пусть функция $f(x)$ допускает продолжение $f(z)$ на верхнюю полуплоскость, так что

1) $f(z)$ регулярная в области $\text{Im } z \geq 0$ за исключением конечного числа полюсов, при этом на действительной оси полюсов нет;

2) $\max_{C_R} |f(z)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, где C_R — полуокружность радиуса R в верхней полуплоскости.

Тогда:

а) если $f(x)$ четная, то

$$F_c(\lambda) = \sqrt{2\pi}i \sum \operatorname{res} f(z)e^{i\lambda z},$$

где сумма распространена на вычеты в полюсах, расположенных в верхней полуплоскости;

б) если $f(x)$ нечетная, то

$$F_s(\lambda) = \sqrt{2\pi} \sum \operatorname{res} f(z)e^{i\lambda z},$$

где сумма распространена на вычеты в полюсах, расположенных в верхней полуплоскости.

201) Доказать, что если $F[f] = g(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$, то

$$\text{а) } F[f(ax)] = \frac{1}{|a|} g\left(\frac{\lambda}{a}\right);$$

$$\text{б) } F[f(x-a)] = e^{-i\lambda a} g(\lambda);$$

$$\text{в) } F[f(x) \cos \omega x] = \frac{1}{2} [g(\lambda - \omega) + g(\lambda + \omega)];$$

$$\text{г) } F[f(x) \sin \omega x] = \frac{1}{2i} [g(\lambda - \omega) - g(\lambda + \omega)].$$

202) Доказать, что если $F_c[f]$, $F_s[f]$ — соответственно косинус-преобразование Фурье и синус-преобразование Фурье функции $f(x)$, то

а) при $f(0) = 0$

$$F_c[f'] = -\lambda F_s[f]; \quad F_s[f'] = \lambda F_c[f];$$

б) при $f'(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$

$$F_c[f''] = -\lambda^2 F_c[f]; \quad F_s[f''] = -\lambda^2 F_s[f].$$

203) Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{1+|x|^3}$ имеет порядок $O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

204) Доказать, что если $f(x)$ абсолютно интегрируема на любом конечном промежутке $[a; b]$, имеет ограниченное изменение на $(-\infty; +\infty)$:

$$\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \bigvee_a^A f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0,$$

то в каждой точке x_0 интеграл Фурье сходится и имеет значение $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]$.

205) Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

является функцией ограниченной вариации на любом промежутке $[a; b]$.

206) Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не является функцией ограниченной вариации на $[0; 1]$.

207) Доказать, что функция $f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$,

$$f'(x) = \varphi(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{\pi}{x^2} - \frac{2\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не является функцией ограниченной вариации на $[0; 2]$ (сравните с утверждением 4 гл. II § 3).

208) Доказать, что функция $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ в промежутке

$[0; +\infty)$ не есть функция ограниченной вариации ($\bigvee_a^{+\infty} f(x) = \lim_{A \rightarrow \infty} \bigvee_a^A f(x)$).

209) Пусть $F[f]$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

Доказать справедливость формул

$$а) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x} F(\alpha) \frac{\sin \alpha a}{\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} \int_{x-a}^{x+a} f(\xi) d\xi;$$

$$б) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F(\alpha) \cos \alpha a d\alpha = \frac{1}{2} [f(x+a) - f(x-a)].$$

210) Пусть $f(x)$ — четная функция и $F[f]$ — ее преобразование Фурье.

Доказать равенства:

$$а) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \frac{\sin \lambda a}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{2} \int_{x-a}^{x+a} f(\xi) d\xi;$$

$$б) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \cos \lambda a \cos \lambda x d\lambda = \frac{1}{2} [f(x+a) - f(x-a)].$$

211) Пусть $f(x)$ — нечетная функция и $F[f]$ — ее преобразование Фурье.

Доказать равенства:

$$а) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \frac{\sin \lambda a}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda = \frac{1}{2i} \int_{x-a}^{x+a} f(\xi) d\xi;$$

$$б) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F(\lambda) \cos \lambda a \sin \lambda x d\lambda = \frac{1}{2i} [f(x+a) - f(x-a)].$$

212) Пусть $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ — преобразования Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) G(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s) g(s) ds.$$

213) Пусть $F_c(\lambda)$ и $G_c(\lambda)$ — косинус-преобразования Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Доказать, что

$$\int_0^{+\infty} F_c(\lambda) G_c(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [f(x+s) + f(|x-s|)] g(s) \, ds.$$

214) Пусть $F_s(\lambda)$ и $G_s(\lambda)$ — синус-преобразования Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Доказать, что

$$\int_0^{+\infty} F_s(\lambda) G_s(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} [f(x+s) - f(|x-s|)] g(s) \, ds.$$

215) Проверить формулы Фурье

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos zx \, dz \int_0^{+\infty} f(u) \cos zu \, du,$$

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin zx \, dz \int_0^{+\infty} g(u) \sin zu \, du$$

для функций $f(x)$ и $g(x)$, если:

а) $f(x) = \cos \frac{x^2}{2}$; б) $f(x) = \sin \frac{x^2}{2}$;

в) $f(x) = \text{ci } x = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} \, dt$;

г) $g(x) = \text{si } x = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$;

д) $f(x) = \frac{1}{x^s}$, $0 < s < 1$;

е) $g(x) = \frac{1}{x^s}$, $0 < s < 1$.

Доказать соотношения.

216) $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^2} \cos 2zx \, dz = \begin{cases} 1-x; & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$

$$217) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \ln \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} \cos xz \, dz = \frac{1-e^{-x}}{2}, \quad x \geq 0.$$

$$218) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin xz}{\sqrt{z}} \, dz = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$219) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xz}{\sqrt{z}} \, dz = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$220) \int_0^{+\infty} \frac{\sin xz}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \, dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}.$$

$$221) \int_0^{+\infty} \frac{J_n(z)}{z^n} \cos xz \, dz = \begin{cases} \frac{1}{(2n-1)!!} (1-x^2)^{n-1/2}, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, $J_n(z)$ — функция Бесселя (см. гл. III § 6).

222) Пусть $F(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$. $|F(\lambda)|$ называется амплитудным спектром функции $f(x)$.

Найти амплитудный спектр функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x \in (-\infty; 0] \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

223) Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ дважды дифференцируемо на всей числовой прямой.

224) Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = xe^{-|x|}$ бесконечно дифференцируемо на всей числовой прямой.

225) Доказать, что в формуле Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) \, du$$

при соблюдении достаточных условий теоремы интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du$$

может быть заменен интегралом по любому конечному промежутку $[a; b]$, т. е. интегралом

$$\int_a^b f(u) \cos z(u-x) du,$$

если точка x лежит между a и b .

226) Пусть $f(x)$ монотонно убывает на $(0; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ и $f(x)$ интегрируема в окрестности точки $x = 0$. Доказать, что ее синус-преобразование Фурье для $x > 0$ есть неотрицательная функция.

227) Пусть $f(x)$ — ограниченная, монотонно убывающая функция на $[0; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ и при $x > 0$ существует монотонно возрастающая $f'(x) < 0$.

Доказать, что косинус-преобразование Фурье функции $f(x)$ есть неотрицательная функция, интегрируемая на $[0; +\infty)$.

228) Показать, что утверждения задач 226 и 227 не верны для следующих функций:

а) для функции

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2}, & x = a, \\ 0, & x > a \end{cases}$$

косинус-преобразование Фурье $F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin ax}{x}$ меняет знак;

б) для функции $f(x) = e^{-ax}$ синус-преобразование Фурье $F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{a^2 + x^2}$ хотя и сохраняет знак плюс для $x > 0$, но не интегрируемо в промежутке $[0; +\infty)$.

229) Вычислить свертку следующих функций:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a, \end{cases} \quad g(x) = f(x);$$

$$\text{в) } f(x) = \chi_b(x), \quad g(x) = \frac{\chi_{a+h}(x) - \chi_a(x)}{h}, \quad \text{где}$$

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x \leq 0, \quad x \geq a \end{cases} \quad \text{и } h > 0.$$

230) Доказать, что для любой функции $\varphi \in \tilde{R}^1(-\infty; +\infty)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\varphi(x) * \frac{\chi_{a+h}(x) - \chi_a(x)}{h} \right) = \varphi(x - a)$$

(предел в смысле сходимости в среднем, т. е. $\lim_{h \rightarrow 0} g(x, h) = g(x)$,

$$\text{если } \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x, h) - g(x)| dx = 0).$$

231) Найти функцию $g(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\int_0^{+\infty} g(z) \sin zx \, dz = f(x),$$

если

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x \geq \pi; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos x, & 0 \leq x < \pi, \\ -\frac{\pi}{4}, & x = \pi, \\ 0, & x > \pi; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

232) Найти функцию $g(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\int_0^{+\infty} g(z) \cos zx \, dz = f(x),$$

$$\text{если } f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ответы к главе II

- 1) $1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \cos nx.$
- 2) $-\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2 - 1} \sin nx.$
- 3) $\frac{\pi}{4}(a-b) - \frac{2}{\pi}(a-b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n};$

$$g(x) = \begin{cases} bx, & -\pi < x < 0, \\ ax, & 0 \leq x < \pi, \\ \frac{a-b}{2}\pi, & x = \pm\pi. \end{cases}$$
- 4) $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(4n+2)x}{(2n+1)^2}.$
- 5) $\frac{4-\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n}.$
- 6) $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3(-1)^{n+1}}{n} \sin \pi nx.$
- 7) $\frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos nx}{n^2}.$
- 8) $\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sin nx}{n} \right),$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0; 2\pi), \\ 2\pi^2, & x = 0, x = 2\pi. \end{cases}$$
- 9) $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos 2nx}{n^2} - \frac{\pi \sin 2nx}{n} \right), g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0; \pi), \\ \frac{1}{2}\pi^2, & x = 0, x = \pi. \end{cases}$
- 10) $2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3},$

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0; \pi), \\ -x^2, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = \pi, x = 0, x = -\pi. \end{cases}$$

- $$11) f(x) = \frac{\pi^2}{6} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos nx}{n^2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin nx}{n} -$$
- $$- \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}, g(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < \pi, \\ \frac{1}{2}\pi^2, & x = \pm\pi. \end{cases}$$
- $$12) \frac{ah}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{\pi n} \sin nh \cos nx.$$
- $$13) \frac{ah}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{\pi n} [(1 - \cos nh) \sin nx + \sin nh \cos nx].$$
- $$14) \frac{2h}{\pi^2} + 4h \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nh}{4\pi^2 h^2 - \pi^2} \cos nx.$$
- $$15) \frac{h}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h \sin nh}{\pi^2 - h^2 n^2} \sin nx + \frac{h(1 + \cos nh)}{\pi^2 - h^2 n^2} \cos nx \right).$$
- $$16) \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$
- $$17) \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(4n^2 - 1)} \cos 2nx.$$
- $$18) \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cos(2n-1)x}{(4n-3)(4n-1)} - \frac{\sin(2n-1)x}{(4n-3)(4n-2)(4n-1)} \right).$$
- $$19) \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(4n^2 - 1)} \cos 2nx.$$
- $$20) \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \cos x +$$
- $$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} + \frac{(-1)^{n+1} - 1}{\pi(n^2 - 1)} \right) \cos nx + \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} \right].$$
- $$21) \frac{5}{12} \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \sin(2n-1)x}{\pi^2 (2n-1)^3}.$$
- $$22) \frac{5}{8} \sin x - \frac{5}{16} \sin 3x + \frac{1}{16} \sin 5x.$$
- $$23) \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x.$$

$$24) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x.$$

$$25) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2} \sin(2n+1)x.$$

$$26) \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} + \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nx.$$

$$27) \frac{2 \operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{1+n^2} \sin nx.$$

$$28) \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{4n^2-1} \sin 2nx, g(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$29) \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2-1}, g(x) = \cos x, |x| \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$30) \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{4n^2-1}.$$

$$31) \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{c}.$$

$$32) \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{c},$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -c < x < 0, \\ 1, & 0 < x < c, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, x = c, x = -c. \end{cases}$$

$$33) \frac{2c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{c}.$$

$$34) \frac{c}{4} - \frac{2c}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi x}{c}}{(2n+1)^2} + \frac{c}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{c}}{n},$$

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -c < x < 0, \\ x, & 0 \leq x < c, \\ \frac{c}{2}, & x = \pm c. \end{cases}$$

- 35) $\frac{c}{2} - \frac{4c}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi x}{c}.$
- 36) $\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n}.$
- 37) $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{(\pi n)^2} \cos \pi n x.$
- 38) $\frac{4}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos \pi n x}{\pi^2 n^2} - \left(\frac{2}{\pi n} - \frac{1}{n^3 \pi^3} \right) \sin \pi n x \right].$
- 39) $\frac{2}{3} c^2 + \frac{4c^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos \frac{\pi n x}{c}.$
- 40) $\frac{12c^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} \sin \frac{\pi n x}{c}.$
- 41) $\frac{8}{15} c^4 + \frac{48c^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} \cos \frac{\pi n x}{c}.$
- 42) $\frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2n x}{4n^2 - 1} \right].$
- 43) $\frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\pi \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} [a \cos n x - n \sin n x] \right\}.$
- 44) $\frac{\sin a\pi}{\pi a} + \frac{2a}{\pi} \sin a\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos n x}{a^2 - n^2}.$
- 45) $\frac{\pi^2 - 8}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{192n^2 + 4}{\pi(16n^2 - 1)^3} - \frac{\pi}{16n^2 - 1} \right) \cos 4n x - \right.$
 $\left. - \left(\frac{8n}{(16n^2 - 1)^2} + \frac{128n^3 + 24n}{\pi(16n^2 - 1)^3} \right) \sin 4n x \right].$
- 46) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n x}{4n^2 - 1}.$
- 47) $-\frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{2} \cos x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 1}{(4n^2 - 1)^2} \cos 2n x.$
- 48) $\frac{l}{4} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi(2n+1)x}{l}}{(2n+1)^2} + \frac{8l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi(4n+2)x}{l}}{(4n+2)^2}.$

$$49) \frac{2h}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin hn}{hn} \right)^2 \cos nx \right\}.$$

$$50) \frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi} + \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot e^{a\pi} - 1}{a^2 + n^2} \cos nx.$$

51) Если a целое, то при $a = 2m$

$$\sin 2mx = \frac{8m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2m)^2 - (2n-1)^2},$$

при $a = 2m - 1$

$$\sin(2m-1)x = \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + 2(2m-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2m-1)^2 - (2n)^2} \right\};$$

если a не целое, то

$$\sin ax = \frac{1 - \cos \pi a}{\pi} \left\{ 1 + 2a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{a^2 - (2n)^2} + \right. \\ \left. + 2a \frac{1 + \cos \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{a^2 - (2n-1)^2} \right\}.$$

$$52) \frac{\operatorname{sh} a\pi}{\pi a} + 2 \operatorname{sh} a\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a}{a^2 + n^2} \cos nx.$$

$$53) \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nx.$$

$$54) -\frac{\pi}{2} \sin x - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx.$$

$$55) \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi nc}{l} \sin \frac{\pi nx}{l}.$$

$$56) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [1 - (-1)^n e^{\pi a}] \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx.$$

$$57) \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sin nx}{a^2 - n^2}.$$

$$58) \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{a^2 + n^2} \sin nx.$$

$$59) \frac{1}{2^m} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{n=1}^m C_{2m}^{m-n} \cos 2nx.$$

- 60) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx$. 61) $1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx$.
- 62) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx$. 63) $-\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n}$.
- 64) $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$. 65) $-\frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.
- 66) $f(-x) = f(x)$, $f(\pi - x) = -f(x)$.
- 67) $f(-x) = -f(x)$, $f(\pi - x) = f(x)$.
- 68) $\frac{\pi}{4}$. Указание. $y = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.
- 69) а) $\frac{\pi^2}{6}$; б) $\frac{\pi^2}{12}$; в) $\frac{\pi^2}{8}$.
- 70) Указание. $\frac{\pi-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $0 < x < 2\pi$; а) в разложении функции $y = \frac{\pi-x}{2}$ заменить x на $2x$; б) вычесть из разложения функции $y = \frac{\pi-x}{2}$ разложение функции $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$.
- 71) а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.
- 72) а) $\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{2}$; б) $\frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}$.
- 73) а) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n}$;
 б) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{2} +$
 $+ 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}$;
 в) $\frac{1}{5}\pi^4 + 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos nx$.

- 74) Указание. Разлагая в ряд Фурье функцию, приведенную в правой части, при повторном интегрировании по частям учесть, что значения ее производной в точках 0 и π равны 0.
- 75) Указание. Получив разложение функции $\frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12}$ на $[0; \pi]$, доказать, что обе части полученного равенства не меняются при замене x на $2\pi - x$.
- 80) а) $e^{\cos x} \cdot \cos(\sin x)$; б) $e^{\cos x} \sin(\sin x)$. Указание. Рассмотреть $\varphi(e^{ix})$, где $\varphi(z) = e^z$.
- 81) а) $\sin(\cos x) \operatorname{ch}(\sin x)$; б) $\cos(\cos x) \operatorname{sh}(\sin x)$. Указание. Рассмотреть $\varphi(\cos x + i \sin x)$, где $\varphi(z) = \sin z$ и использовать формулу $\sin(\alpha + \beta i) = \sin \alpha \operatorname{ch} \beta + i \cos \alpha \operatorname{sh} \beta$.
- 82) а) $\cos(\cos x) \cdot \operatorname{ch}(\sin x)$; б) $\sin(\cos x) \operatorname{sh}(\sin x)$. Указание. Рассмотреть $\varphi(\cos x + i \sin x)$, где $\varphi(z) = \cos z$ и использовать формулу $\cos(\alpha + \beta i) = \cos \alpha \operatorname{ch} \beta - i \sin \alpha \operatorname{sh} \beta$.
- 83) а) $(1 + \cos x) \ln 2 \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{2} x \sin x$, $|x| < \pi$; б) $\frac{1}{2} x (1 + \cos x) - \sin x \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)$, $|x| < \pi$. Указание. Рассмотреть $\varphi(e^{ix})$, где $\varphi(z) = \left(1 + \frac{1}{z} \right) \ln(1 + z)$ и использовать равенства $\varphi(z) = 1 + \ln(1 + z) + \frac{1}{z} (\ln(1 + z) - z)$ и $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
- 84) а) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cos x - \frac{x \sin x}{2}$;
 б) $\begin{cases} \sin x \left(\ln 2 \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right), & x \neq k\pi, \\ 0, & x = k\pi. \end{cases}$ Указание. Применяя равенство $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$, рассмотреть функцию $\varphi(z) = \ln(1 + z)$.
- 85) а) $\sin x \cdot \ln 2 \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin x$, $|x| < \pi$;
 б) $\cos x \cdot \ln 2 \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos x$, $|x| < \pi$.
- 86) а) $(\cos x + \cos 2x) \ln 2 \cos \frac{x}{2} + \frac{x}{2} (\sin x + \sin 2x) - \cos x$;

$$б) (\sin x + \sin 2x) \ln 2 \cos \frac{x}{2} - \frac{x}{2} (\cos x + \cos 2x) - \sin x.$$

$$87) \cos x \ln 2 \cos x + x \sin x, 0 \leq x < \frac{\pi}{2};$$

$$\cos x \ln 2 |\cos x| + (x - \pi) \sin x, \frac{\pi}{2} < x \leq \pi.$$

Указание. Рассмотреть функцию $\varphi(z) = \frac{1}{z} \ln(1 + z^2)$.

$$88) а) (1 - \cos x) \ln 2 \sin \frac{x}{2} - \frac{\pi - x}{2} \sin x + \cos x, 0 < x < 2\pi;$$

$$б) (1 - \cos x) \ln 2 \sin \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \cos x - \frac{1}{2}, 0 < x < 2\pi.$$

Указание. Использовать равенства $\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$;

$\frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}$. Рассмотреть функцию $\varphi(z) = \ln(1 - z)$.

$$89) \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\cos x \ln 2 \cos x + x \sin x), 0 \leq x < \frac{\pi}{2};$$

$$-\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\cos x \ln 2 |\cos x| + (x - \pi) \sin x), \frac{\pi}{2} < x \leq \pi.$$

Указание. См. пример 2 гл. II § 2 и задачу 87.

$$90) а) \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}, 0 \leq x \leq \pi;$$

$$б) \ln(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{\sin x}), 0 \leq x \leq \pi. \text{ Указание. Рас-}$$

смотреть функцию $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} = \arcsin z$;

проверить формулу

$$\arcsin e^{ix} = \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} + i \ln(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{\sin x}).$$

$$91) а) \arcsin \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}} + \sqrt{2 \sin x} \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \cos x, \\ 0 \leq x \leq \pi;$$

$$б) \ln(\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{\sin x}) - \sqrt{2 \sin x} \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \sin x, \\ 0 \leq x \leq \pi. \text{ Указание. Рассмотреть функцию}$$

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \arcsin z + \frac{1}{z}(\sqrt{1-z^2} - 1) = \\ &= \left\{ z + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{z^7}{7} + \dots \right\} - \\ &- \frac{1}{z} \left\{ \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} z^4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} z^8 + \dots \right\} = \\ &= \frac{z}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^5}{5 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{z^7}{7 \cdot 8} + \dots\end{aligned}$$

102) 0 при $|a| < 1$, $2\pi \ln |a|$ при $|a| > 1$. Указание. Продифференцировать по a .

103) $-\frac{\pi}{n} a^n$ при $|a| < 1$, $-\frac{\pi}{na^n}$ при $|a| > 1$. Указание. Продифференцировать по a .

104) $\frac{\pi}{1-a^2} \ln \frac{1-a^2}{2}$ при $|a| < 1$, $\frac{\pi}{a^2-1} \ln \frac{a^2-1}{2a^2}$ при $|a| > 1$.

Указание. Разложив функцию $\frac{1}{1-2a \cos x + a^2}$ в ряд, проинтегрировать по частям.

105) 0. 106) 2π .

107) $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^b - a}$ при $|a| < 1$, $\frac{\pi}{2a} \frac{1}{ae^b - 1}$ при $|a| > 1$. Указание.

Разложить $\frac{\sin bx}{1-2a \cos bx + a^2}$ в ряд по системе $\{\sin nbx\}$ и использовать значение интеграла Лапласа (см. пример 55 гл. I § 3).

108) π при $|a| < 1$, 0 при $|a| > 1$.

109) $\frac{\pi^2}{2(1-a^2)}$ при $|a| < 1$, $\frac{\pi^2}{2(a^2-1)}$ при $|a| > 1$.

110) $\frac{4\pi^2}{a} \ln(1-a)$ при $|a| < 1$, $\frac{4\pi^2}{a} \ln \left(1 - \frac{1}{a}\right)$ при $|a| > 1$.

111) $\frac{2\pi^2 a^m}{1-a^2}$ при $|a| < 1$, $\frac{2\pi^2}{a^m(a^2-1)}$ при $|a| > 1$.

112) $\frac{\pi}{2} a^{m-1}$ при $|a| < 1$, $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a^{m+1}}$ при $|a| > 1$.

113) $\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}} \ln \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}$. Указание. Положив $a = \sin \alpha$,

привести знаменатель к виду $1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2$, $\lambda = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Восстановить a из уравнения $\lambda = \frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}}$.

$$114) \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right)^m. \text{ См. указание к задаче 113.}$$

$$115) 2\pi \frac{a^m}{1 - a^2}. \quad 116) 0. \text{ См. указание к задаче 113.}$$

$$117) \frac{2\pi}{a} \ln \left(1 + \frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right). \text{ См. указание к задаче 113.}$$

$$118) \pi \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}. \text{ См. указание к задаче 113.}$$

$$119) -\frac{\pi}{n} \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right)^n. \text{ См. указание к задаче 113.}$$

$$120) \frac{2\pi^2}{\sqrt{1 - a^2}}. \text{ См. указание к задаче 113.}$$

$$121) \frac{2\pi^2}{\sqrt{1 - a^2}} \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right)^m. \text{ См. указание к задаче 113.}$$

$$122) \frac{8\pi^2}{a} \ln \left(1 - \frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right). \text{ См. указание к задаче 113.}$$

$$123) \frac{\pi}{a} \left(\frac{a}{1 + \sqrt{1 - a^2}} \right)^m. \text{ См. указание к задаче 113.}$$

$$124) \frac{\pi}{e^b(1 + \sqrt{1 - a^2}) - a}. \text{ См. указания к задачам 113 и 107.}$$

$$125) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - a^2} + ae^{-b}}{1 + \sqrt{1 - a^2} - ae^{-b}}. \text{ См. указания к задачам 113 и 107.}$$

$$126) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda. \quad 127) \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda.$$

$$128) \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\beta \cos \lambda x + \lambda \sin \lambda x}{\lambda^2 + \beta^2} d\lambda. \quad 129) \frac{2h}{\pi a} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos a\lambda}{\lambda^2} \cos \lambda x d\lambda.$$

$$130) \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \cos \lambda x d\lambda. \quad 131) \int_0^{+\infty} e^{-a\lambda} \sin \lambda x d\lambda.$$

- 132) $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda \pi}{1 - \lambda^2} \sin \lambda x d\lambda.$ 133) $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \frac{\lambda \pi}{2}}{1 - \lambda^2} \cos \lambda x d\lambda.$
- 134) $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda(x - a) - \sin \lambda(x - b)}{\lambda} d\lambda.$
- 135) $\frac{2A\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi n \lambda}{\omega}}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \lambda x d\lambda.$
- 136) $\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + \alpha^2} d\lambda.$ 137) $\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{\lambda^2 + \alpha^2} d\lambda.$
- 138) $\frac{\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(\lambda - \beta)^2 + \alpha^2} + \frac{1}{(\lambda + \beta)^2 + \alpha^2} \right] \cos \lambda x d\lambda.$
- 139) $\frac{4\alpha\beta}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{[(\lambda - \beta)^2 + \alpha^2][(\lambda + \beta)^2 + \alpha^2]} d\lambda.$
- 140) $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \cos \lambda x d\lambda.$ 141) $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \sin \lambda x d\lambda.$
- 142) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda}{\lambda}.$ 143) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\lambda}{2}}.$
- 144) $i\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\lambda}.$
- 145) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{2(\sin 2\lambda - \sin \lambda)}{\lambda} + \frac{4 \cos \lambda}{\lambda^2} + \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{4}{\lambda^3} \right) \sin \lambda \right].$
- 146) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin 2\lambda - \sin \lambda}{\lambda} + i \frac{\lambda \cos \lambda - \sin \lambda}{\lambda^2} \right).$
- 147) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 + i\lambda)}.$ 148) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} i e^{i\lambda} \cos 1.$
- 149) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2 - 3\lambda^2 + i(4\lambda - \lambda^3)}{4 + \lambda^4}.$ 150) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha}{\lambda^2 + \alpha^2}.$

$$151) -i\sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\alpha\lambda}{(\lambda^2 + \alpha^2)^2}.$$

$$152) \sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{(\lambda - \omega)^2 + 1} + \frac{1}{(\lambda + \omega)^2 + 1} \right].$$

$$153) -i\sqrt{2\pi} \left[\frac{1}{(\lambda - \omega)^2 + 1} - \frac{1}{(\lambda + \omega)^2 + 1} \right].$$

$$154) \frac{1}{|\alpha|} \sqrt{2} e^{-\frac{\lambda^2}{4\alpha^2}}.$$

$$155) -\frac{i\lambda}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

$$156) \frac{4\sqrt{2}\pi e^{-i\lambda}}{\lambda^2 + 4}.$$

$$157) \frac{2\sqrt{2}\pi(\lambda^2 - 4\lambda + 1)}{(\lambda^2 + 1)^2}.$$

$$158) -\frac{i\sqrt{2\pi}}{4} \lambda e^{-\lambda}.$$

$$159) e^{-\frac{\lambda^2 + \alpha^2}{2}} \operatorname{ch} \alpha\lambda.$$

$$160) -\frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \left[e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin \left(\frac{\lambda - 1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) - e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \sin \left(\frac{\lambda + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

$$161) \frac{i}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda} (\lambda \operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1). \quad 162) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{4 \sin \frac{\lambda}{4}}{\lambda^2} \right).$$

$$163) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos a\lambda}{\lambda}.$$

$$164) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \pi\lambda}{1 - \lambda^2}.$$

$$165) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\ln 5}{(\ln^2 5 + \lambda^2)}.$$

$$166) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda) \sin \frac{\pi\lambda}{2}} *).$$

$$167) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ln(1 + \lambda^2).$$

$$168) e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

$$169) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\lambda}{2}} \right). \text{ Указание. } \frac{1}{\operatorname{sh} a} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2a}{a^2 + \pi^2 n^2}.$$

$$170) \frac{1}{e^{\sqrt{2\pi}\lambda} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\lambda}.$$

$$171) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{th} \lambda.$$

$$172) \operatorname{th} \left(\lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1 \right).$$

*) Определение и основные свойства функции $\Gamma(x)$ см. гл. III § 5.

$$173) 2^{\nu-\frac{3}{2}} \Gamma\left(\nu - \frac{1}{2}\right) \lambda^{1-\nu} J_{\nu}(\lambda)^*,$$

J_{ν} — функция Бесселя (см. гл. III § 6).

$$174) 2^{\nu-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \lambda^{-\nu} H_{\nu}(\lambda),$$

$$H_{\nu}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{\nu+2n+1}}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\nu + n + \frac{3}{2}\right)}^*.$$

$$175) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda e^{-\lambda}. \quad 176) \frac{\sqrt{2}\pi}{2} e^{-\lambda a}. \quad 177) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-\lambda}}{b^2}.$$

$$178) \frac{\sqrt{2}\pi}{4b^2} (2 - (2 + |b\lambda|) e^{-|b\lambda|}) \operatorname{sign} \lambda.$$

$$179) \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 0 \leq \lambda < 1; \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \lambda = 1; \quad 0, \quad \lambda > 1.$$

$$180) (1 - \lambda^2)^{1/2}, \quad 0 < \lambda < 1; \quad 0, \quad \lambda > 1.$$

$$181) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 \left(\cos \frac{3\lambda}{2} - 1\right)}{\lambda^2}. \quad 182) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda \sin \pi \lambda}{1 - \lambda^2}.$$

$$183) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 + \cos \pi \lambda}{1 - \lambda^2}. \quad 184) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\ln 2}{\ln^2 2 + \lambda^2}.$$

$$185) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda) \cos \frac{\pi \lambda}{2}}^*. \quad 186) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ln \frac{\sqrt{\lambda^2 + \beta^2}}{\lambda}.$$

$$187) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}. \quad 188) e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

$$189) \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}} \sin \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right). \quad 190) \frac{\sqrt{2}\pi}{2a} e^{-a\lambda}.$$

$$191) \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad 0 \leq \lambda < 1; \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \lambda = 1; \quad 0, \quad \lambda > 1.$$

$$192) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos \lambda, \quad 0 \leq \lambda < \pi; \quad 0, \quad \lambda > \pi.$$

$$193) 1, \quad 0 < \lambda < 1; \quad 0, \quad \lambda > 1.$$

$$194) (1 - \lambda^2)^{1/2}, \quad 0 < \lambda < 1; \quad 0, \quad \lambda > 1.$$

*) Определение и основные свойства функции $\Gamma(x)$ см. гл. III § 5.

- 209) а) Указание. Заменить $\sin \alpha a$ равенством $\frac{e^{i\alpha a} - e^{-i\alpha a}}{2i}$.
Дифференцируя по x и используя формулу обращения преобразования Фурье, получить равенство

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F(\alpha) d\alpha = f(x), \text{ где}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} \frac{F(\alpha)}{i\alpha} d\alpha, \text{ откуда } \varphi(x) = \int_A^x f(\xi) d\xi - \varphi(A).$$

- б) Указание. Формула б) получается из формулы а) дифференцированием по параметру.

- 215) а) Указание. В интеграле $\int_0^{+\infty} \cos \frac{1}{2}(z^2 + xz) dz$ сделать замену $z = x + u$; использовать значения интегралов Френеля.

- в) Указание. Использовать значение интеграла

$$F_c(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos xu du \int_u^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

- (см. задачу 74 гл. III § 12); показать, что

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} F_c(z) \cos xz dz = \text{ci } x.$$

- г) Указание. Использовать значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} \sin \gamma x dx \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ (см. задачу 75 гл. III § 12).}$$

- д) Указание. Использовать значение интеграла

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\cos zx}{z^s} dz = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{x^{s-1}}{\Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}} \text{ (см. задачу 222 гл. III}$$

- § 12) и формулу приведения для функции $\Gamma(x)$.

- е) Указание. См. пункт д) настоящей задачи.

- 216) Указание. Вычислить косинус-преобразование Фурье функции, указанной справа в доказываемом равенстве.

- 220) Указание. Вычислить синус-преобразование Фурье функции $\frac{1}{e^{2\pi x} + 1}$ и использовать значение интеграла Дирихле.
- 221) Указание. Вычислить косинус-преобразование Фурье функции $f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^{n-1/2}, & x \in [0; 1), \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ Разложить функцию $\cos zx$ в степенной ряд и использовать значение $\int_0^1 z^{2\nu} (1-z^2)^{n-1/2} dz = \frac{1}{2} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$ *)
- 222) $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\lambda|} \left| \sin \frac{\lambda}{2} \right|.$
- 229) а) $\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} (e^{-a(x-a)} - e^{-a(x+a)})$ для $x > a$;
 $\frac{1}{a\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-a(x+a)})$ для $|x| \leq a$; 0 для $x < -a$.
 б) 0 для $|x| > 2a$; $\frac{2a - |x|}{\sqrt{2\pi}}$ для $|x| \leq 2a$.
 в) Если $0 < b < h$, то 0 для $x > a + b + h$, $\frac{a + b + h - x}{\sqrt{2\pi}h}$ для $a + h < x \leq a + b + h$, $\frac{b}{\sqrt{2\pi}h}$ для $a + b < x \leq a + h$, $\frac{x - a}{\sqrt{2\pi}h}$ для $a < x \leq a + b$, 0 для $x \leq a$. Если $0 < h < b$, то 0 для $x > a + b + h$, $\frac{a + b + h - x}{\sqrt{2\pi}h}$ для $a + b < x \leq a + b + h$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ для $a + h < x \leq a + b$, $\frac{x - a}{\sqrt{2\pi}h}$ для $a < x \leq a + h$, 0 для $x \leq a$.
- 231) а) $\frac{\sin \pi x}{1 - x^2}$; б) $\frac{x \sin \pi x}{1 - x^2}$; в) $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{x}{1 + x^2}$, $x \geq 0$.
- 232) e^{-x} , $x \geq a$.

*) Определение и основные свойства функции $\Gamma(x)$ см. гл. III § 5.

§5. Теоретические задачи

1. Занумеруем множество чисел $\frac{m}{2^q}$, $1 \leq m \leq 2^q - 1$, $q \in \mathbb{N}$, и обозначим через $\frac{m_n}{2^{q_n}}$ элемент этого множества с номером n . Пусть $f_n\left(\frac{m_n}{2^{q_n}}\right) = 1$ в точке $\frac{m_n}{2^{q_n}}$, $f_n(x) = 0$ на $\left(-\infty; \frac{m_n}{2^{q_n}} - \frac{1}{2^{q_n-1}}\right] \cup \left[\frac{m_n}{2^{q_n}} + \frac{1}{2^{q_n-1}}; +\infty\right)$ и $f_n(x)$ линейна на отрезках $\left[\frac{m_n}{2^{q_n}} - \frac{1}{2^{q_n-1}}; \frac{m_n}{2^{q_n}}\right]$, $\left[\frac{m_n}{2^{q_n}}; \frac{m_n}{2^{q_n}} + \frac{1}{2^{q_n-1}}\right]$ (см. рис. 11).

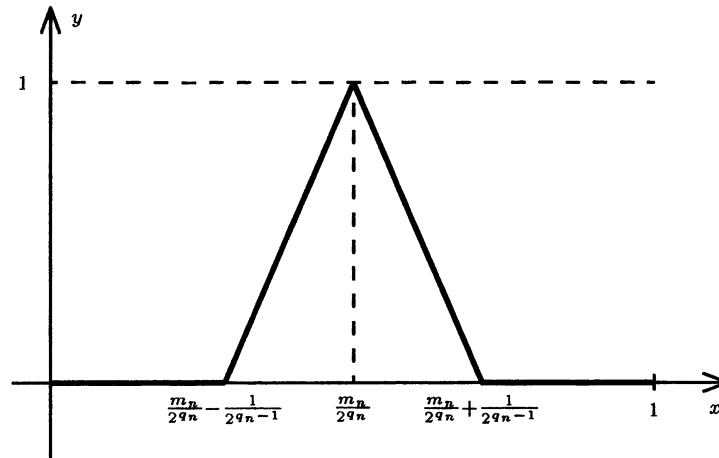


Рис. 11

Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ расходится в каждой точке отрезка $[0; 1]$, но

$$\int_0^1 f_n^2(x) dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty.$$

2. Пусть $\{\psi_n\}$ — ортонормированная система на $[a; b]$; $f \in \tilde{R}^2(a, b)$ и $S_n(x)$ — частичная сумма порядка n ряда Фурье

функции f по системе $\{\psi_n\}$. Функция $K_n(t, x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t)\psi_i(x)$ называется ядром порядка n системы $\{\psi_n\}$.

Показать, что

$$S_n(x) = \int_a^b f(t)K_n(t, x) dt.$$

3. Система Хаара состоит из следующих функций: $\chi_0^{(0)} \equiv 1$;

$$\chi_0^{(1)} = \begin{cases} 1, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right), \\ 0, & x = \frac{1}{2}, \\ -1, & x \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]; \end{cases}$$

для $m \in \mathbb{N}$ и $1 \leq q \leq 2^m$

$$\chi_m^{(q)}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m}{2}}, & x \in \left(\frac{q-1}{2^m}; \frac{q-\frac{1}{2}}{2^m}\right), \\ -2^{\frac{m}{2}}, & x \in \left(\frac{q-\frac{1}{2}}{2^m}; \frac{q}{2^m}\right), \\ 0, & x \in \left(\frac{r-1}{2^m}; \frac{r}{2^m}\right), \quad r \neq q, \quad 1 \leq r \leq 2^m, \end{cases}$$

$\chi_m^{(q)}(0) = \chi_m^{(q)}\left(\frac{1}{2^{m+2}}\right)$, $\chi_m^{(q)}(1) = \chi_m^{(q)}\left(1 - \frac{1}{2^{m+2}}\right)$, в тех точках интервала $(0; 1)$, где значение $\chi_m^{(q)}$ не определено предыдущими условиями, это значение равно полусумме значений $\chi_m^{(q)}$ на прилегающих интервалах. Проверить, что система Хаара ортонормирована на $[0; 1]$.

4. Пусть

$$K_m^{(q)}(t, x) = \chi_0^{(0)}(t)\chi_0^{(0)}(x) + \chi_0^{(1)}(t)\chi_0^{(1)}(x) + \\ + \chi_1^{(1)}(t)\chi_1^{(1)}(x) + \dots + \chi_m^{(q)}(t)\chi_m^{(q)}(x),$$

где $\chi_i^{(j)}(x)$ — функции Хаара, определенные в задаче 3, т. е. ядро системы Хаара соответствующего порядка. Обозначим

через Q квадрат $[0; 1] \times [0; 1]$. Разделим его горизонтальными и вертикальными прямыми на 2^{2n} равных квадратов $Q_{i,j}^{(n)}$, $1 \leq i \leq 2^n$, $1 \leq j \leq 2^n$, занумерованных первым индексом слева направо и вторым — снизу вверх. При этом считаем, что квадраты, не прилегающие к границе Q , открытые, а прилежащие к границе Q включают соответствующий интервал этой границы (например, квадрат $Q_{0,3}^{(2)}$ включает интервал $\left\{ \frac{1}{2} < t < \frac{3}{4}, x = 0 \right\}$). Таким образом, при любом фиксированном n каждая точка Q либо принадлежит одному из $Q_{i,j}^{(n)}$, $1 \leq i \leq 2^n$, $1 \leq j \leq 2^n$, либо лежит на общей границе двух или четырех этих квадратов.

Показать, что

$$\text{а) } K_0^{(0)}(t, x) = 1, (t, x) \in Q;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } K_{n-1}^{(2^{n-1})}(t, x) &= \\ &= \begin{cases} 2^n, & (t, x) \in \bigcup_{i=1}^{2^n} Q_{i,i}^{(n)}, \\ 0, & (t, x) \in Q_{i,j}^{(n)}, \quad 1 \leq i \leq 2^n, 1 \leq j \leq 2^n, i \neq j, \end{cases} \end{aligned}$$

а значение $K_{n-1}^{(2^{n-1})}$ в точках общей границы двух или четырех квадратов $Q_{i,j}^{(n)}$ равно среднему арифметическому ее значений на этих квадратах;

в) функция $K_n^{(q)}$, $1 \leq q \leq 2^n$, совпадает с функцией $K_{n-1}^{(2^{n-1})}$ во всех точках Q , не принадлежащих замыканию квадратов $Q_{i,i}^{(n)}$, $1 \leq i \leq q$, лежащих на главной диагонали Q ; если $(t, x) \in Q_{i,i}^{(n)}$, $1 \leq i \leq q$, то

$$K_n^{(q)}(t, x) = 2^n K_0^{(1)} \left(\left(t - \frac{i-1}{2^n} \right) \cdot 2^n; \left(x - \frac{i-1}{2^n} \right) \cdot 2^n \right);$$

в тех точках, лежащих на границах квадратов $Q_{i,j}^{(n+1)}$, где значение $K_n^{(q)}$ не определено предыдущими условиями, это значение равно среднему арифметическому значений $K_n^{(q)}$ в прилегающих квадратах.

5. Пусть $f \in \tilde{R}^2(0, 1)$. Пользуясь результатами задач 2 и 4, доказать, что в любой точке x_0 непрерывности функции f ее ряд Фурье по системе Хаара сходится к $f(x_0)$.

Многочлен $P_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{2n+1}}{n! 2^{n+1/2}} \frac{d^n(1-x^2)^n}{dx^n}$ называется нормированным многочленом Лежандра порядка n .

6. Показать, что нормированные многочлены Лежандра $P_n(x)$ образуют ортонормальную систему на $[-1; 1]$.

7. Доказать, что система нормированных многочленов Лежандра полна на $[-1; 1]$.

8. Обозначим через A_n множество всех многочленов $P_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом 1. Доказать, что

$$\min_{A_n} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n)! [(2n+1)!]^2} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx.$$

9. Обозначим через B_n множество всех многочленов $P_n(x)$ степени не выше n , удовлетворяющих условию $\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \leq 1$. Доказать, что $\max_{B_n} P_n^2(0) = \sum_{k=0}^n P_k^2(0)$.

10. Пусть $2l$ -периодическая функция $f \in \tilde{R}^2(-l, l)$. Для $q \in \mathbb{N}$ обозначим через $a_{n,1}$, $b_{n,1}$ коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_i^{(1)}\}$ и через $a_{m,q}$, $b_{m,q}$ — по системе $\{\varphi_i^{(q)}\}$. Доказать, что если $m = nq$, то $a_{m,q} = a_{n,1}$, $b_{m,q} = b_{n,1}$, а если m не кратно q , то $a_{m,q} = 0$, $b_{m,q} = 0$; т. е. ряд $\sigma_l(f)$ совпадает с рядом $\sigma_{ql}(f)$.

11. Пусть функция f , определенная на $\mathbb{R}$, удовлетворяет условиям: $f \in \tilde{R}^2[-\pi, \pi]$; $f(x + \pi) \equiv -f(x)$. Показать, что f является 2π -периодической, и найти, какой особенностью обладают ее коэффициенты Фурье a_n , b_n по системе $\{\varphi_i\}$.

12. Пусть f — периодическая функция $f \in \tilde{R}^2[-\pi, \pi]$ и a_n , b_n — ее коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_i\}$. Какими особенностями обладают последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, если график f симметричен

а) относительно оси OY и точки $(\frac{\pi}{2}; 0)$;

б) относительно оси OY и прямой $x = -\frac{\pi}{2}$?

13. Показать, что системы $\{\cos 2nx\}$ и $\{\sin(2n-1)x\}$, $n \in \mathbb{N}$, являются полными ортогональными системами соответственно на $[0; \pi]$ и $[0; \pi/2]$.

14. Пусть f — 2π -периодическая функция, $f \in \tilde{R}^2[-\pi, \pi]$.

Функция $w_1(\delta, f) = \sup_{0 \leq |h| \leq \delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h) - f(x)| dx$ называется

интегральным модулем непрерывности f . Доказать, что

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} w_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \quad |b_n| \leq \frac{1}{2\pi} w_1\left(\frac{\pi}{n}, f\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье f по системе $\{\varphi_i\}$.

15. Пусть f — 2π -периодическая функция с ограниченным изменением на $[-\pi; \pi]$ и V — ее полная вариация на $[-\pi; \pi]$. Доказать, что

$$|a_n| \leq \frac{V}{2n}, \quad |b_n| \leq \frac{V}{2n},$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье f по системе $\{\varphi_i\}$.

16. Доказать, что семейство функций $\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$ ограничено в совокупности на $[-\pi; \pi]$.

17. Пусть

$$Q(x, n) = \frac{\cos nx}{n} + \frac{\cos(n+1)x}{n-1} + \dots + \frac{\cos(2n-1)x}{1} - \left\{ \frac{\cos(2n+1)x}{1} + \frac{\cos(2n+2)x}{2} + \dots + \frac{\cos 3nx}{n} \right\}.$$

Используя результат задачи 16, доказать, что существует такая постоянная C , что $|Q(x, n)| \leq C$ для всех $x \in [-\pi; \pi]$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

18. Пусть $\varphi(x, Q)$ обозначает сумму любого числа первых слагаемых тригонометрического полинома $Q(x, n)$, определенного в задаче 17. Доказать, что для любого $\delta > 0$ существует такое число M_δ , что $|\varphi(x, n)| \leq M_\delta$ для всех x : $\delta \leq |x| \leq \pi$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

19. Пусть $Q_m(x) = Q(x, 2^{m^2})$, где тригонометрический полином $Q(x, n)$ определен в задаче 17. Доказать, что функция

$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} Q_m(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а ряд $\sigma(f)$ расходится при $x = 0$.

20. Доказать, что для любой функции $f \in \tilde{R}(-\pi, \pi)$ и всех $n \in \mathbb{N}$ определены числа

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

21. Функция f определяется на $[-\pi; \pi]$ следующими условиями:

$$f(x) = 3^n \cdot \sin 4^n x, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2^n}; \frac{\pi}{2^{n-1}}\right], \quad n \in \mathbb{N},$$

$$f(0) = 0,$$

$$f(x) = -f(-x), \quad x \in [-\pi; 0).$$

Показать, что

а) $f \in C[\varepsilon, \pi]$ для любого $\varepsilon > 0$;

б) $f \in \tilde{R}(-\pi, \pi)$;

в) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, где $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ (ср. с задачей 18 гл. I § 5).

22. Пусть $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. Показать, что $f \in \tilde{R}(-\pi, \pi)$, но $f \notin \tilde{R}^2[-\pi, \pi]$.

23. Пусть $f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$. Показать, что

$$f \in C([-\pi; \pi] \setminus [-\varepsilon; \varepsilon])$$

при любом $\varepsilon > 0$: ???, но $f \notin \tilde{R}(-\pi, \pi)$.

24. Пусть $f \in C[-\pi; \pi]$ и ряд $\sigma(f)$ сходится к функции $g(x)$ для всех $x \in (-\pi; \pi)$. Доказать, что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in (-\pi; \pi)$.

25. Пусть 2π -периодическая функция $f \in C[-\pi; \pi]$ и a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_i\}$. Доказать, что если $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), b_n = o\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$, то $\sigma(f) \rightrightarrows f$ на $[-\pi; \pi]$.

Ответы, решения, указания

1. Решение. Из определения $f_n(x)$ получаем, что

$$0 \leq \int_0^1 f_n^2(x) dx \leq \frac{1}{2^{q_n-2}}$$

и так как $q_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, то, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n^2(x) dx = 0.$$

Пусть $x_0 \in [0; 1]$. С одной стороны, существует такая подпоследовательность $n_j \uparrow +\infty$, что $f_{n_j}(x_0) = 0$; а с другой стороны, существует такая бесконечная последовательность $n_i \uparrow +\infty$, что $x_0 \in \left[\frac{m_{n_i}}{2^{q_{n_i}}} - \frac{1}{2^{q_{n_i}}}, \frac{m_{n_i}}{2^{q_{n_i}}} + \frac{1}{2^{q_{n_i}}} \right]$ и, следовательно, $f_{n_i}(x_0) \geq \frac{1}{2}$; откуда и следует расходимость последовательности $\{f_n(x)\}$.

4. Указание. Пункт а) проверяется непосредственно. Пункт б) доказывается по индукции. Для доказательства пункта в) воспользоваться равенством

$$K_n^{(q)}(t, x) = K_{n-1}^{(2^{n-1})}(t, x) + \sum_{i=1}^q \chi_n^{(i)}(t) \chi_n^{(i)}(x), \quad 1 \leq q < 2^n.$$

5. Решение. Пусть $x_0 \in (0; 1)$ и не является двоично рациональным числом. Тогда, применяя результаты задач 2 и 4, получаем, что

$$S_m^{(q)}(x_0) = \int_0^1 f(t) K_m^{(q)}(t, x_0) dt = \frac{1}{|I_m^{(q)}|} \int_{I_m^{(q)}} f(t) dt, \quad (*)$$

где $I_m^{(q)}$ есть интервал длины $\frac{1}{2^m}$ или $\frac{1}{2^{m+1}}$. Если же $x_0 \in [0; 1]$ — двоично рациональное число, то либо $K_m^{(q)}(t, x_0)$ равно 2^{m+1} , 2^m или 2^{m-1} на интервале $I_m^{(q)}$, включающем x_0 , и

длины $\frac{1}{2^{m+1}}$, $\frac{1}{2^m}$ или $\frac{1}{2^{m-1}}$ соответственно; либо $K_m^{(q)}(t, x_0) = 2^m$ на интервале $I_m^{(q)} = \left(x_0 - \frac{1}{2^{m+1}}; x_0\right)$ и 2^{m-1} на интервале $J_m^{(q)} = \left(x_0; x_0 + \frac{1}{2^m}\right)$. В первом случае для $S_m^{(q)}(x_0)$ справедлива формула (*), а во втором — равенство

$$S_m^{(q)}(x_0) = \frac{1}{2|I_m^{(q)}|} \int_{I_m^{(q)}} f(t) dt + \frac{1}{2|J_m^{(q)}|} \int_{J_m^{(q)}} f(t) dt$$

(см. рис. 12). В силу непрерывности f в обоих случаях имеем

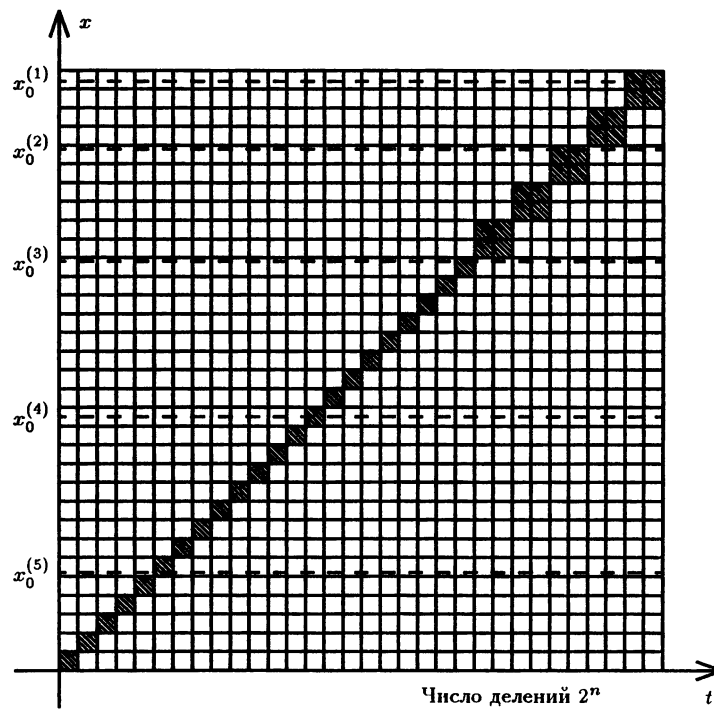


Рис. 12

равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m^{(q)}(x_0) = f(x_0).$$

6. Решение. Интегрируя n раз по частям, получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx &= \\ &= \frac{(2n+1)}{(n!)^2 2^{2n+1}} \left(\sum_{q=1}^n (-1)^{q-1} [(1-x^2)^n]^{(n-q)} \cdot [(1-x^2)^m]^{(m+q-1)} + \right. \\ &\quad \left. + (-1)^n \int_{-1}^1 (1-x^2)^n [(1-x^2)^m]^{(m+n)} dx \right). \end{aligned}$$

Так как -1 и 1 — корни порядка n многочлена $(1-x^2)^n$, то отсюда получаем, что

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{(-1)^n (2n+1)}{(n!)^2 2^{2n+1}} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n [(1-x^2)^m]^{(m+n)} dx.$$

Если $m < n$, то степень многочлена $(1-x^2)^m$ меньше, чем $m+n$, и следовательно,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0.$$

Если $m = n$, то поскольку старший коэффициент многочлена $(1-x^2)^n$ равен $(-1)^n$, то

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = \\ &= \frac{(2n+1)!}{(n!)^2 2^{2n+1}} B\left(n+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n+1)!}{2^n n! (2n+1)!!} = 1. \end{aligned}$$

7. Указание. Если $f \in \tilde{R}^2[-1, 1]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический полином

$$T_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos \pi n x + b_n \sin \pi n x),$$

приближающий f в среднем с погрешностью не больше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, а тригонометрический полином на $[-1; 1]$ равномерно приближается алгебраическим многочленом с погрешностью не больше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$.

8. Решение. Представим многочлен $\Pi_n(x) \in A_n$ в виде $\Pi_n(x) = \sum_{m=0}^n \alpha_m P_m(x)$. Так как степень многочлена $P_m(x)$ равна m , старший коэффициент $\Pi_n(x)$ равен 1, а в $P_n(x)$ старший коэффициент $a_0 = \frac{(-1)^n (2n+1)!!}{(n!)^2 2^{n+1/2}}$, то $\alpha_n = \frac{1}{a_0}$. В силу полноты системы $\{P_i(x)\}$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\int_{-1}^1 \Pi_n^2(x) dx = \frac{1}{a_0^2} + \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m^2,$$

откуда видно, что интеграл $\int_{-1}^1 \Pi_n^2(x) dx$ принимает минимальное значение на множестве A , если $\sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m^2 = 0$, т. е.

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{a_0} P_n(x).$$

9. Решение. Представим многочлен $\Pi_n(x) \in B$ в виде $\Pi_n(x) = \sum_{m=0}^n \beta_m P_m(x)$. В силу неравенства Коши—Буняковского имеем: $\Pi_n^2(0) \leq \sum_{m=0}^n \beta_m^2 \sum_{m=0}^n P_m^2(0)$. Так как система $\{P_i\}$ полна, то, используя равенство Парсеваля и условие $\Pi_n \in B$, получаем, что $1 = \int_{-1}^1 \Pi_n^2(x) dx = \sum_{m=0}^n \beta_m^2$, откуда следует, что $\Pi_n^2(0) \leq \sum_{m=0}^n P_m^2(0)$ для всех $\Pi_n(x) \in B$. В то же время для многочлена $\Pi_{1/2}(x) = \left\{ \sum_{m=0}^n P_m(0) \right\}^{1/2} \cdot \sum_{m=0}^n P_m(0) P_m(x)$

справедливы соотношения $\Pi_n^1 \subset B$, $(\Pi_n^1)^2(0) = \left(\sum_{m=0}^n P_m^2(0)\right)^{1/2}$, что и завершает доказательство.

10. Указание. Равенства $a_{m,q} = a_{n,1}$, $b_{m,q} = b_{n,1}$ для $m = nq$ проверяются непосредственно, а равенство нулю всех остальных коэффициентов следует из равенства Парсеваля.

11. $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

12. а) $b_n = 0$, $a_{2n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$; б) $b_n = 0$, $a_{2n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

13. Указание. Продлить функцию f с отрезка $[0; \pi]$ или $[0; \pi/2]$ на $[-\pi; \pi]$ таким образом, чтобы в ряде $\sigma(f)$ коэффициенты при функциях, не входящих в рассматриваемые системы, равнялись нулю (ср. с задачей 12), и использовать полноту системы $\{\varphi_i\}$ на $[-\pi; \pi]$.

14. Указание. В интеграле, определяющем a_n и b_n , сделать замену $t = x + \frac{\pi}{n}$.

15. Указание. Проверить, что неравенство

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f\left(x + \frac{\pi k}{n}\right) - f\left(x + \frac{(k-1)\pi}{n}\right) \right| dx$$

справедливо для любого $k \in \mathbb{Z}$, и сложить эти неравенства для $k = 1, 2, \dots, 2n$. То же самое рассуждение проводится для b_n .

16. Решение. При любом $n \in \mathbb{N}$ функция $\Phi_n(x)$ нечетная, поэтому достаточно доказать ограниченность в совокупности семейства $\Phi_n(x)$ на $(0; \pi]$. Для $x \in (0; \pi]$ положим $n_x = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$. Если $n \leq n_x$, то

$$|\Phi_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq nx \leq n_x x \leq 1.$$

Если $n > n_x$, то представим $\Phi_n(x)$ в виде

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n_x} \frac{\sin kx}{k} + \sum_{k=n_x+1}^n \frac{\sin kx}{k}.$$

Первое слагаемое, как и выше, по абсолютной величине не превосходит 1. Второе слагаемое преобразуем:

$$\sum_{k=n_x+1}^n \frac{\sin kx}{k} = \frac{B_n}{n} + \sum_{k=n_x+1}^{n-1} B_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{B_{n_x}}{n_x+1},$$

где $B_m = \sum_{k=1}^m \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos (m + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}}$ (проверьте). Следовательно,

$$\left| \sum_{k=n_x+1}^n \frac{\sin kx}{k} \right| \leq \frac{2}{n_x+1} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{2\pi}{x(n_x+1)} \leq 2\pi,$$

и окончательно,

$$|\Phi_n(x)| \leq 1 + 2\pi.$$

17. Указание. Получить равенство

$$Q(x, n) = 2 \sin nx \cdot \sum_{m=1}^n \frac{\sin mx}{m}.$$

18. Указание. К сумме членов $\varphi(x, Q)$ с положительными коэффициентами и к сумме членов с отрицательными коэффициентами (если они присутствуют) применить преобразование Абеля и оценку $\left| \sum_{n=1}^N \cos nx \right| \leq \frac{1}{|\sin x/2|}$ (см. решение задачи N 16).

19. Указание. Показать, что ряд, полученный раскрытием скобок в ряде $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} (Q_m(x))$, есть $\sigma(f)$ и этот ряд при $x = 0$ не удовлетворяет критерию Коши.

21. Указание. При $m = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеем:

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin 4^n x \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n-1} 3^k \int_{\pi/2^k}^{\pi/2^{k-1}} \sin 4^n x \sin 4^k x \, dx + \right. \\ &\quad \left. + 3^n \int_{\pi/2^n}^{\pi/2^{n-1}} \sin^2 4^n x \, dx + \sum_{k=n+1}^{2n-1} 3^k \int_{\pi/2^k}^{\pi/2^{k-1}} \sin 4^n x \sin 4^k x \, dx + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=2n}^{\infty} 3^k \int_{\pi/2^k}^{\pi/2^{k-1}} \sin 4^n x \sin 4^k x \, dx \right). \end{aligned}$$

Показать, что первое и третье слагаемые равны нулю, четвертое является бесконечно малым, а второе — бесконечно большим при $n \rightarrow +\infty$.

22. Решение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ сходится равномерно на каждом из отрезков $[2k\pi + \varepsilon; 2(k+1)\pi - \varepsilon]$, $k \in \mathbb{Z}$, при любом $\varepsilon \in (0; \pi)$. Ряд $\sum_{n=1}^m \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, следовательно, функция $F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и $F'(x) = f(x)$ для всех $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда $\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) dx = F(\pi) - F(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in (0; \pi)$, и в силу непрерывности F существует $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) dx = F(\pi) - F(0)$. Так как функция f нечетна, то отсюда следует, что $f \in \tilde{R}(-\pi, \pi)$. Поскольку ряд $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n\sqrt{n}}$ сходится равномерно, то этот ряд есть $\sigma(F)$. Из равенства $F'(x) = f(x)$, $x \neq 2\pi k$, следует, что если $f \in \tilde{R}^2(-\pi; \pi)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ есть $\sigma(f)$, что противоречит равенству Парсеваля, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ расходится.

23. Решение. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ сходится равномерно на каждом из отрезков $[2\pi k + \varepsilon; 2\pi(k+1) - \varepsilon]$ при любом $\varepsilon \in (0; \pi)$. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$ также сходится равномерно на каждом таком отрезке. Следовательно, функция $F(x) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$ на каждом интервале $(2\pi k; 2\pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, является первообразной функции f . Ряд $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \ln n}$ сходится равномерно

но на $\mathbb{R}$, следовательно, его сумма $\Phi(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и этот ряд есть $\sigma(\Phi)$. Функция F непрерывна на множестве $M = [-\pi; \pi] \setminus \{0\}$, и $\Phi'(x) = F(x)$ для всех $x \in M$. Предположим, что $\lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = A$. Так как функция F четна, то в таком случае $\lim_{x \rightarrow 0-} F(x) = A$, функция F ограничена на $[-\pi; \pi]$ и ряд $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n}$ есть $\sigma(F)$. В таком случае в силу теоремы Фейера последовательность $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n S_m$, где $S_m = \sum_{k=2}^m \frac{1}{k \ln k}$, должна сходиться к $-A$, а так как $\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = +\infty$, то и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = +\infty$. Полученное противоречие показывает, что функция F не имеет предела при $x \rightarrow 0+$, а так как $\int_{\varepsilon}^{\pi} f(x) dx = F(\pi) - F(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon \in (0; \pi)$, то интеграл $\int_0^{\pi} f(x) dx$ расходится. В силу нечетности f отсюда следует, что $f \notin \tilde{R}(-\pi, \pi)$.

24. Решение. Пусть

$$S_0(x) = \frac{a_0}{2}, \quad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

и

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n S_m(x).$$

В силу теоремы Фейера $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = f(x)$ для всех $x \in (-\pi; \pi)$. Так как из равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = g(x)$, $x \in (-\pi; \pi)$, следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = g(x)$, $x \in (-\pi; \pi)$, то $f(x) \equiv g(x)$ на $(-\pi; \pi)$.

25. Решение. Пусть

$$S_0(x) = \frac{a_0}{2}, \quad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

и

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n S_m(x).$$

В силу теоремы Фейёра $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = f(x)$ для всех $x \in (-\pi; \pi)$.

Из равенства $S_n(x) - \sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n m(a_m \cos mx + b_m \sin mx)$

получаем, что $0 \leq |S_n(x) - \sigma_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{m=1}^n m[|a_m| + |b_m|]$,

откуда в силу условия $a_m = o\left(\frac{1}{m}\right)$, $b_m = o\left(\frac{1}{m}\right)$, $m \rightarrow \infty$,

следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(x) - \sigma_n(x)) = 0$. Отсюда получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = f(x)$ для всех $x \in (-\pi; \pi)$.

Глава III. Специальные функции

§1. Интеграл вероятностей

Так называется функция (функция ошибок)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

В теории вероятностей используется функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

которая также иногда называется интегралом вероятностей. Функции $\operatorname{erf}(x)$ и $\Phi(x)$ хорошо изучены, и для них, а также связанной с ними функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

составлены подробные таблицы.

На рис. 13 а), б) приведены графики функций

$$y = \operatorname{erf}(x) \quad \text{и} \quad y = \Phi(x).$$

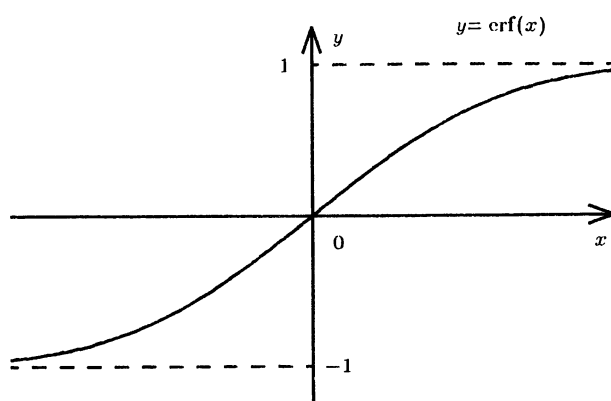


Рис. 13а

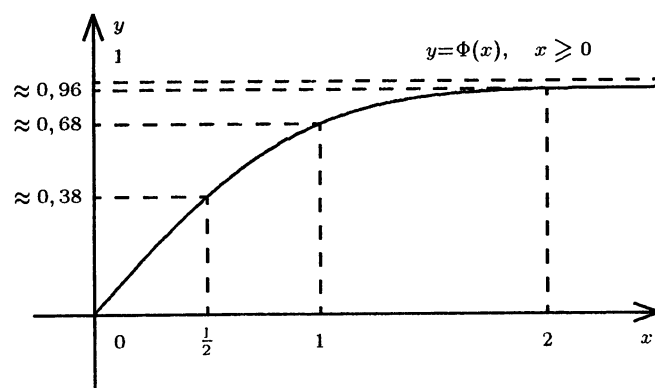


Рис. 13б

§2. Интегральные функции (синус, косинус, логарифм и показательная функция)

Интегральный синус и косинус соответственно определяются формулами

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt; \quad \text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt, \quad x > 0.$$

Вместо функции $\text{Si}(x)$ можно рассматривать функцию $\text{si}(x)$:

$$\text{si}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt,$$

при этом $\text{Si}(x) = \text{si}(x) + \frac{\pi}{2}$.

Графики функций $\text{Si}(x)$ и $\text{Ci}(x)$ приведены соответственно на рис. 14 а) и б).

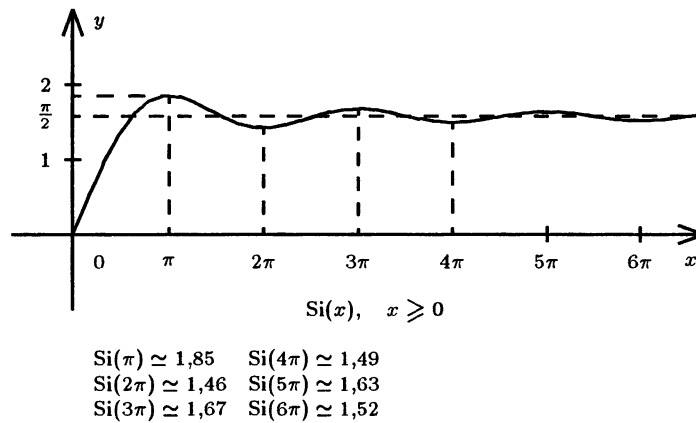


Рис. 14а

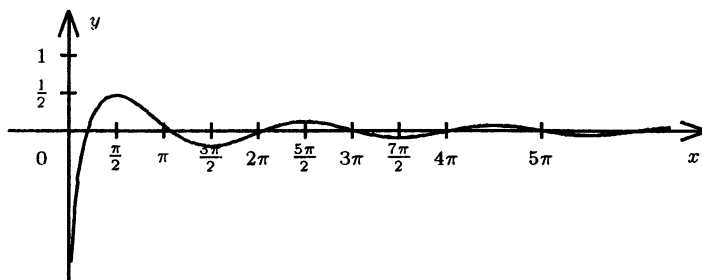


Рис. 146

Интегральные логарифм и показательная функция соответственно определяются формулами

$$\text{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, \quad x > 0, \quad \text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt, \quad x < 0.$$

При этом для $x > 1$ в определении функции $\text{Li}(x)$ интеграл понимается в смысле главного значения, т. е.

$$\text{Li}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\epsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right).$$

Графики функций $\text{Li}(x)$ и $\text{Ei}(x)$ приведены соответственно на рис. 15 а) и б).

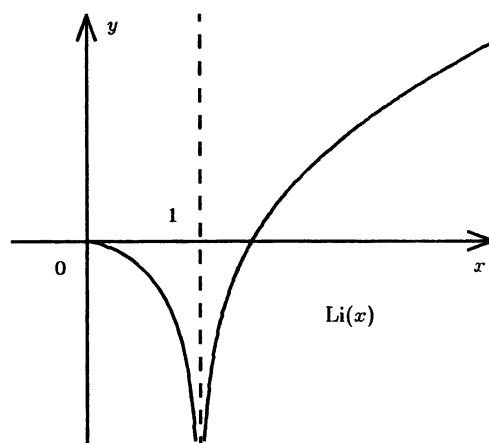


Рис. 15а

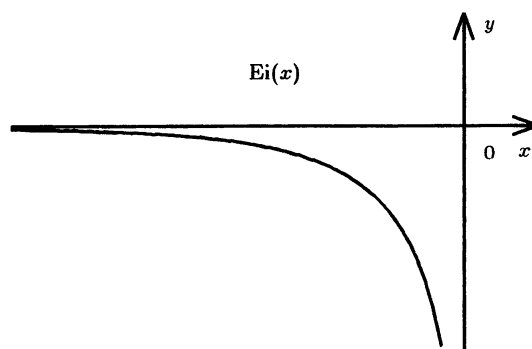


Рис. 15б

§3. Синус- и косинус-интегралы Френеля

Так называются соответственно функции

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt \quad \text{и} \quad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt.$$

При $x \rightarrow +\infty$ каждая из этих функций стремится к пределу:

$$S(+\infty) = C(+\infty) = \frac{1}{2}.$$

Графики этих функций приведены на рис. 16.

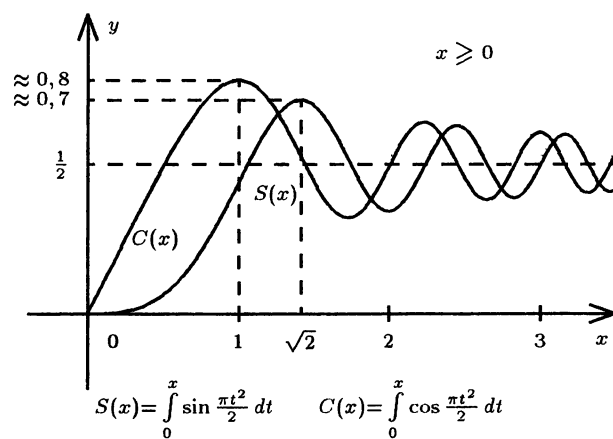


Рис. 16

§4. Эллиптические интегралы

Так называются интегралы $\int R(x, y) dx$, где R — рациональная функция от x и $y = \sqrt{P(x)}$, $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени, т. е.

$$\int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}) dx \quad (1)$$

и

$$\int R(x, \sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f}) dx. \quad (2)$$

Вообще говоря, интегралы (1) и (2) не всегда могут быть выражены в элементарных функциях в конечном виде, кроме некоторых частных случаев. В частности, эти интегралы выражаются в элементарных функциях, если многочлен $P(x)$ имеет кратные корни. Приведем еще примеры, где $P(x)$ не имеет кратных корней, но соответствующие интегралы выражаются в элементарных функциях:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3 + 30x^2 - 4x + 7}{\sqrt{x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 7x - 51}} dx = \\ = 2\sqrt{x^4 + 10x^3 - 2x^2 + 7x - 51} + C; \end{aligned}$$

$$\int \frac{1+x^4}{1-x^4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} + C;$$

$$\int \frac{10x^3 + 1}{\sqrt{4x^3 + 1}} dx = x\sqrt{4x^3 + 1} + C.$$

Прежде всего отметим, что интеграл (1) приводится к интегралу (2) подстановкой $x - x_0 = t^2$ (или $x - x_0 = -t^2$), где x_0 — действительный корень многочлена $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^3 + bx^2 + cx + d}) dx = \\ = \int R(t^2 + x_0, t\sqrt{at^4 + b_1t^3 + c_1t^2 + d_1t + f_1}) 2t dt. \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно рассматривать лишь интеграл вида (2). Поскольку

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = a(x^2 + px + q) \cdot (x^2 + p_1x + q_1),$$

то можно показать, что найдется такая линейная ($x = t + \alpha$) или дробно-линейная подстановка $\left(x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}\right)$, которая уничтожает в обоих квадратных трехчленах $x^2 + px + q$ и $x^2 + p_1x + q_1$ линейные члены. Сделав такую замену, можно (с точностью до слагаемого, которое представляет собой элементарную функцию) привести интеграл (2) к виду

$$\int \frac{R(t^2) dt}{\sqrt{A(1 + \alpha t^2)(1 + \beta t^2)}},$$

а затем с помощью замен к виду

$$\int \frac{R_1(z^2) dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}, \quad (3)$$

где k ($0 < k < 1$) — некоторая константа. Выделяя из рациональной функции $R_1(z^2)$ целую часть и разлагая ее правильную часть на простейшие дроби, можно показать, что в общем виде интеграл (3) приводится с помощью элементарных подстановок и с точностью до слагаемого, являющегося элементарной функцией, к следующим трем стандартным интегралам:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \\ & \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \\ & \int \frac{dx}{(1 + \alpha x^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}, \end{aligned}$$

где $0 < k < 1$ и число α , вообще говоря, комплексное.

Эти интегралы, как показал Лиувиль, не выражаются через элементарные функции. Лежандр назвал их эллиптическими интегралами соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода.

Из них особую важность и частое применение имеют первые два.

Сделаем в первом из них замену $x = \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, приведем его к виду

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Такая же замена $x = \sin \varphi$ приводит второй интеграл к виду

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} &= \\ &= \frac{1}{k^2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{1}{k^2} \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Наконец, третий интеграл при указанной подстановке переходит в интеграл $\int \frac{d\varphi}{(1 + \alpha \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$, который называется эллиптическим интегралом 3-го рода в форме Лежандра. Интегралы

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \quad \text{и} \quad \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

называются соответственно эллиптическими интегралами 1-го и 2-го рода в форме Лежандра.

Тем самым определены функции Лежандра

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} \quad (4)$$

и

$$E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi. \quad (5)$$

Для этих функций составлены таблицы их значений при различных φ и k ($|k| < 1$) (параметр k называется модулем). В них параметр φ , рассматриваемый как угол, выражается в градусах, а модуль k рассматривается как синус некоторого угла θ , который также выражается в градусах. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$

эллиптические интегралы (4) и (5) называются полными эллиптическими интегралами и соответственно иногда обозначаются $K(k)$ и $E(k)$. Для полных эллиптических интегралов существуют особые таблицы их значений как функций k . Эллиптические интегралы (4) и (5) довольно хорошо изучены, для них установлен ряд формул и они применяются на равных правах с элементарными функциями.

Пример 1. Привести к эллиптическим интегралам интеграл $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. Сделаем замену $x = \cos \varphi$. Тогда

$$dx = -\sin \varphi d\varphi,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^4} &= \sqrt{(1-x^2)(1+x^2)} = \sin \varphi \sqrt{2-(1-x^2)} = \\ &= \sin \varphi \cdot \sqrt{2-\sin^2 \varphi} = \sqrt{2} \sin \varphi \sqrt{1-\frac{1}{2} \sin^2 \varphi}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\pi/2}^{\pi/3} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} - \int_0^{\pi/3} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{2} \sin^2 \varphi}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right) \right).\end{aligned}$$

Пример 2. Привести к эллиптическим интегралам интеграл $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(x+3)x}}$ при

а) $0 < a < b$;

б) $-3 < a < b < -2$.

Решение. а) Положим $x = t^2$, тогда

$$dx = 2t dt, \quad x(x+2)(x+3) = t^2(t^2+2)(t^2+3)$$

и

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(x+3)x}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2 dt}{\sqrt{(t^2+2)(t^2+3)}}, \quad t > 0.$$

Положим теперь $t = \sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi$, тогда

$$dt = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi, \quad t^2 + 2 = 2(\operatorname{tg}^2 \varphi + 1) = \frac{2}{\cos^2 \varphi},$$

$$t^2 + 3 = 2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 3 = \frac{2 \sin^2 \varphi + 3 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{3(1 - \frac{\sin^2 \varphi}{3})}{\cos^2 \varphi}$$

и

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{2 dt}{\sqrt{(t^2+2)(t^2+3)}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{3} \sin^2 \varphi}}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

где $\varphi_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{2}}$, $\varphi_2 = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{b}{2}}$.б) Положим $x = -t^2$, тогда

$$dx = -2t dt,$$

$$x(x+2)(x+3) = -t^2(2-t^2)(3-t^2) = t^2(t^2-2)(3-t^2)$$

и

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x+2)(x+3)x}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{-2t dt}{t\sqrt{t^2-2}(3-t^2)}, \quad \sqrt{2} < t < \sqrt{3}.$$

Положим теперь

$$\sin \varphi = \sqrt{3-t^2}, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

тогда

$$\cos \varphi d\varphi = \frac{-t dt}{\sqrt{3-t^2}}, \quad \sqrt{t^2-2} = \cos \varphi, \quad t = \sqrt{3-\sin^2 \varphi}$$

и

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{-2 dt}{\sqrt{(t^2-2)(3-t^2)}} &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{2 \cos \varphi d\varphi}{\cos \varphi \sqrt{3 - \sin^2 \varphi}} = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{2 d\varphi}{\sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{1}{3} \sin^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

где $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{3+a}$, $\varphi_2 = \arcsin \sqrt{3+b}$.

Пример 3. Свести к эллиптическому интегралу интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x)(x^2-x+1)}}.$$

Решение. Сделаем дробно-линейную подстановку

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1},$$

тогда

$$\begin{aligned} x^2 + x &= \frac{(\mu t + \nu)^2 + (\mu t + \nu)(t + 1)}{(t + 1)^2} = \\ &= \frac{(\mu^2 + \mu)t^2 + (2\mu\nu + \nu + \mu)t + \nu^2 + \nu}{(t + 1)^2}; \\ x^2 - x + 1 &= \frac{(\mu t + \nu)^2 - (\mu t + \nu)(t + 1) + (t + 1)^2}{(t + 1)^2} = \\ &= \frac{(\mu^2 - \mu + 1)t^2 + (2\mu\nu - \mu - \nu + 2)t + (\nu^2 - \nu + 1)}{(t + 1)^2}. \end{aligned}$$

Из условия

$$2\mu\nu + \nu + \mu = 0, \quad 2\mu\nu - \mu - \nu + 2 = 0$$

находим

$$\nu = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \quad \mu = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Тогда подстановка

$$x = \frac{(1 + \sqrt{3})t + (1 - \sqrt{3})}{2(t + 1)}$$

дает

$$x^2 + x = \frac{\frac{3+2\sqrt{3}}{2}t^2 + \frac{3-2\sqrt{3}}{2}}{(t+1)^2} = \frac{(3+2\sqrt{3})t^2 + (3-2\sqrt{3})}{2(t+1)^2},$$

$$x^2 - x + 1 = \frac{\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}}{(t+1)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{t^2 + 1}{(t+1)^2},$$

$$dx = \frac{2(1+\sqrt{3})t + 2\sqrt{3}}{2(t+1)^2} = \frac{(1+\sqrt{3})t + \sqrt{3}}{(t+1)^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x)(x^2-x+1)}} &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{(1+\sqrt{3})t + \sqrt{3}}{\sqrt{t^2+1} \cdot \sqrt{(3+2\sqrt{3})t^2 + (3-2\sqrt{3})}} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{3}}} \int \frac{(1+\sqrt{3})t + \sqrt{3}}{\sqrt{(t^2+1)\left(t^2 - \frac{2\sqrt{3}-3}{3+2\sqrt{3}}\right)}} dt. \end{aligned}$$

Интеграл

$$\int \frac{(1+\sqrt{3})t}{\sqrt{(t^2+1)\left(t^2 - \frac{2\sqrt{3}-3}{3+2\sqrt{3}}\right)}} dt$$

вычисляется с помощью подстановки $t^2 = z$ в элементарных функциях. Интеграл

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2-a^2)}},$$

где

$$a = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3+2\sqrt{3}}}$$

сводится к эллиптическому интегралу с помощью замены $t = \frac{a}{\cos \varphi}$, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ($\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$).

В самом деле,

$$dt = \frac{a\varphi}{\cos^2 \varphi} d\varphi, \quad t^2 - a^2 = a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

$$\begin{aligned}
 t^2 + 1 &= \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + 1 = \frac{a^2 + \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{a^2 + 1 - \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}, \\
 \int \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 - a^2)}} &= \int \frac{a \sin \varphi d\varphi \cos \varphi \cdot \cos \varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{a^2 + 1 - \sin^2 \varphi} \cdot a \sin \varphi} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+a^2} \sin^2 \varphi}}.
 \end{aligned}$$

Пример 4. Свести к вычислению эллиптического интеграла интеграл

$$\int \frac{2x+3}{(x+1)\sqrt{(x^2+3)(x^2+1)}} dx.$$

Решение. Представим выражение $\frac{2x+3}{x+1}$ в виде

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{\frac{2x+3}{x+1} + \frac{2(-x)+3}{(-x)+1}}{2} + \frac{\frac{2x+3}{x+1} - \frac{2(-x)+3}{(-x)+1}}{2},$$

т. е. в виде

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x^2-3}{x^2-1} + \frac{x}{x^2-1}.$$

Итак,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x+3}{(x+1)\sqrt{(x^2+3)(x^2+1)}} dx &= \int \frac{(2x^2-3) dx}{(x^2-1)\sqrt{(x^2+1)(x^2+3)}} + \\
 &+ \int \frac{x dx}{(x^2-1)\sqrt{(x^2+1)(x^2+3)}}.
 \end{aligned}$$

Второй из этих интегралов подстановкой $x^2 = t$ сводится к интегралу

$$\int \frac{du}{(u-1)\sqrt{(u+1)(u+3)}},$$

который вычисляется в элементарных функциях заменой $\frac{1}{u-1} = z$.

Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{2x^2-3}{(x^2-1)\sqrt{(x^2+1)(x^2+3)}} dx. \quad (6)$$

Приведем его к виду

$$\int \frac{R(z^2)}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}} dz.$$

Для этого положим в интеграле (6) $x = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, тогда

$$dx = \frac{\sqrt{1-z^2} + \frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}}}{1-z^2} dz = \frac{1}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}} dz,$$

$$x^2 + 3 = \frac{z^2}{1-z^2} + 3 = \frac{3-2z^2}{1-z^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - 3}{(x^2 - 1)\sqrt{(x^2 + 1)(x^2 + 3)}} dx &= \\ &= \int \frac{\left(2 \cdot \frac{z^2}{1-z^2} - 3\right)}{\left(\frac{z^2}{1-z^2} - 1\right)\sqrt{\left(\frac{z^2}{1-z^2} + 1\right)\left(\frac{z^2}{1-z^2} + 3\right)}} \cdot \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{1-z^2}} = \\ &= \int \frac{5z^2 - 3}{2z^2 - 1} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(3-2z^2)}} = \\ &= \int \frac{\frac{5}{2}(2z^2 - 1) - \frac{1}{2}}{2z^2 - 1} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(3-2z^2)}} = \\ &= \frac{5}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(3-2z^2)}} - \frac{1}{2} \int \frac{dz}{(2z^2 - 1)\sqrt{(1-z^2)(3-2z^2)}}. \end{aligned}$$

Для вычисления первого интеграла делаем замену $z = \sin \varphi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(3-2z^2)}} &= \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{|\cos \varphi| \sqrt{3-2\sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2}{3}\sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Второй интеграл, переписав его в виде

$$C \int \frac{dz}{(1-2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{2}{3}z^2)}}$$

с помощью замены $z = \sin \varphi$, сведем к эллиптическому интегралу 3-го рода в форме Лежандра

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \frac{2}{3} \sin^2 \varphi}}, \quad h = i\sqrt{2}.$$

Пример 5. Свести к вычислению эллиптического интеграла интеграл $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}}$.

Решение. Проинтегрируем тождество

$$\left(x \sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)} \right)' = \sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)} + x \cdot \frac{8x^3 - 5x}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 12 \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}} - 10 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}} + \\ + \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}} = C + x \sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}} = C + \frac{5}{6} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}} - \\ - \frac{1}{12} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}} + \frac{x}{12} \sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}. \end{aligned}$$

Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(\frac{1}{4} - x^2)}}$$

заменой $x = \frac{1}{2} \sin \varphi$ сводится к эллиптическому интегралу

$$C \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi}}.$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)}}$ сделаем в нем также замену $x = \frac{1}{2} \sin \varphi$, тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\frac{1}{4} \sin^2 \varphi \cdot \frac{1}{2} \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi) \cos \varphi}} &= \frac{1}{8} \int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi}} = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{-4(1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi) + 4}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi}} d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi} d\varphi + \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим полный эллиптический интеграл $K(k)$:

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Перепишем его в виде

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - k^2) \sin^2 \varphi}}$$

и сделаем замену переменного по формуле

$$\sin \varphi = \frac{2 \sin \theta}{1 + \sqrt{1 - k^2} + (1 - \sqrt{1 - k^2}) \sin^2 \theta}.$$

Тогда легко проверить, что интеграл переписывается в виде

$$K(k) = (1 + k_1) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \theta}}, \quad (7)$$

где

$$k_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}}.$$

Последовательно применяя формулу (7), получим

$$K(k) = (1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n) K(k_n),$$

где

$$k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}.$$

Ясно, что $0 < k_n < 1$ и $k_n < k_{n-1}^2$. Отсюда следует, что $k_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ (причем довольно быстро). Кроме того, имеем неравенства

$$\begin{aligned} 0 < K(k_n) - \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}} - \frac{\pi}{2} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}}{\sqrt{1 - k_n^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - k_n^2}}{\sqrt{1 - k_n^2}}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $K(k_n) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ при $n \rightarrow +\infty$, т. е.

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n). \quad (8)$$

Полученная формула позволяет записать разложение функции $K(k)$ в бесконечное произведение, т. е.

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + k_n),$$

где

$$k_n = \frac{1 - \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}{1 + \sqrt{1 - k_{n-1}^2}}, \quad k_0 = k, \quad 0 < k < 1.$$

На формуле (8) основывается также метод приближенного вычисления интеграла $K(k)$:

$$K(k) \simeq \frac{\pi}{2} (1 + k_1)(1 + k_2) \cdots (1 + k_n),$$

где k_n определены выше.

Применяя разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \dots, \quad -1 < x \leq 1,$$

в силу неравенства $0 \leq k^2 \sin^2 \varphi \leq k^2 < 1$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \varphi. \quad (9)$$

Так как ряд (9) мажорируется сходящимся числовым рядом $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n}$, то он равномерно сходится на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, и значит, его можно почленно интегрировать. Следовательно,

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(k^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \right\}, \quad |k| < 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично, применяя разложение

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Полученными рядами можно воспользоваться для приближенных вычислений значений $E(k)$ и $K(k)$.

Пример 6. Вычислить с точностью до 10^{-3} значение $E\left(\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Используя разложение (11), имеем

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{16} - \frac{3}{32^2} - \frac{5}{(64)^2} - \frac{7 \cdot 5^2}{(128)^2} + \dots\right).$$

Если ограничиться только написанными членами ряда, то сумма отброшенных членов оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} |r| &= \frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{9!!}{10!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{9 \cdot 2^{10}} + \left(\frac{(11)!!}{(12)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{11 \cdot 2^{12}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(13)!!}{(14)!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{13 \cdot 2^{14}} + \dots \right) < \\ &< \frac{\pi}{2} \left(\frac{9!!}{10!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{9 \cdot 2^{10}} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{9!!}{10!!} \right)^2 \cdot \frac{1}{9 \cdot 2^{10}} \cdot \frac{4}{3} < 2 \cdot \frac{35}{10^6} = 0,00007. \end{aligned}$$

Следовательно, с заданной точностью имеем

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{16} - \frac{3}{32^2} - \frac{5}{64^2} - \frac{175}{128^2}\right) \simeq 1,449.$$

Найдем производные от полных эллиптических интегралов. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dk} &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \sin^2 \varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi = \\ &= \frac{1}{k} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi \right\} = \\ &= \frac{E(k) - K(k)}{k}. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}.$$

Дифференцирование функций $K(k)$ и $E(k)$ законно, так как функции $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ и $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ непрерывны на пря-

прямоугольнике $[\varphi; k] = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times [0; k_0]$, где $0 < k_0 < k < 1$, и имеют на нем непрерывные частные производные по k . Если ввести сопряженный модуль $k' = \sqrt{1 - k^2}$ и функции $E'(k) = E(k')$, $K'(k) = K(k')$, то легко проверить выполнение тождества

$$\frac{d}{dk}(EK' + E'K - KK') = 0,$$

откуда следует, что

$$EK' + E'K - KK' = C. \quad (12)$$

Для нахождения константы C перейдем в равенстве (12) к пределу при $k \rightarrow 0+$. Так как функции $\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ и $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ непрерывны на прямоугольнике $[\varphi; k] = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times [0; k_0]$, то $K(k)$ и $E(k)$ — непрерывные функции на $[0; 1]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0+} K(k) &= \lim_{k \rightarrow 0+} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{k \rightarrow 0+} E'(k) &= \lim_{k' \rightarrow 1-} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = 1. \end{aligned}$$

Поскольку

$$K'(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 - k'^2} = \frac{\pi}{2k}$$

и

$$|E(k) - K(k)| = K(k) - E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi < k^2 \cdot \frac{\pi}{2},$$

то

$$|K'(k)(E(k) - K(k))| = |K'(k)| |E(k) - K(k)| < \frac{\pi^2}{4} \cdot k$$

и

$$\lim_{k \rightarrow 0+} K'(E - K) = 0.$$

Итак, имеем, что

$$\lim_{k \rightarrow 0+} (EK' + E'K - KK') = \frac{\pi}{2}$$

и

$$EK' + E'K - KK' = C \quad \text{при всех } 0 \leq k < 1.$$

Следовательно,

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2} \quad \text{для } 0 \leq k < 1.$$

Другой вывод этого соотношения см. в § 5 этой главы.

§5. Эйлеровы интегралы (Бета- и Гамма-функции)

1. Бета-функция. Так называется интеграл Эйлера первого рода

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad (1)$$

где $x > 0, y > 0$.

Данный интеграл равномерно сходится по x и y на множестве $x \geq x_0 > 0, y \geq y_0 > 0$ соответственно.

В области $x > 0, y > 0$ функция $B(x, y)$ непрерывна и бесконечно дифференцируема. Делая в интеграле (1) замену $t = \frac{z}{1+z}$, получаем другое аналитическое выражение функции $B(x, y)$:

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{x-1}}{(1+z)^{x+y}} dz. \quad (2)$$

Непосредственно из определения Бета-функции следует (если положить $t = 1 - z$), что

$$B(x, y) = B(y, x),$$

а с помощью формулы интегрирования по частям получаем, что

$$\begin{aligned} B(x+1, y) &= \frac{x}{x+y} B(x, y), \\ B(x, y+1) &= \frac{y}{x+y} B(x, y). \end{aligned} \quad (3)$$

Если y есть натуральное число, то, последовательно применяя формулу (3), получим равенство

$$B(x, n) = \frac{n-1}{x+n-1} \cdot \frac{n-2}{x+n-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x+1} \cdot B(x, 1),$$

и поскольку

$$B(x, 1) = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x},$$

то

$$B(n, x) = B(x, n) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}. \quad (4)$$

Полагая в формуле (2) $y = 1 - x$, $0 < x < 1$, имеем

$$B(x, 1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{x-1}}{1+z} dz.$$

2. Гамма-функция. Так называется интеграл Эйлера второго рода

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (5)$$

Данный интеграл сходится равномерно в области $x \geq x_0 > 0$. В области $x > 0$ функция $\Gamma(x)$ непрерывна и бесконечно дифференцируема, причем

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^n t \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$$

Положив в (5) $t = \ln \frac{1}{z}$, получаем другое аналитическое выражение функции $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z} \right)^{x-1} dz. \quad (6)$$

Поскольку $\ln \frac{1}{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - z^{\frac{1}{n}})$ и выражение $n(1 - z^{\frac{1}{n}})$ при возрастании n стремится к своему пределу, возрастая (рассмотрите производную функции $\frac{1 - z^\alpha}{\alpha}$ по α), то аналогично утверждению задачи № 51 гл. I § 5 из (6) следует, что

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{x-1} \int_0^1 (1 - z^{\frac{1}{n}})^{x-1} dz.$$

Полагая $z = t^n$, имеем

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{x-1} dt.$$

Применяя формулы (1) и (4), получаем

$$\int_0^1 t^{n-1} (1-t)^{x-1} dt = B(n, x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}.$$

Следовательно,

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+1+n} = x,$$

откуда получаем формулу приведения

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad x > 0. \quad (7)$$

Из этой формулы, в частности, следует, что

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

так как

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Для любых $x > 0$ и $y > 0$ справедлива формула, устанавливающая связь между эйлеровыми интегралами Γ -функцией и B -функцией:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (9)$$

Рассмотрим функцию $G(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^x}{1 + \frac{x}{n}}$, $x \neq 0$, $x \neq z$,
 z — целое отрицательное число.

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}} &= e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} = \\ &= \left[1 + x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{x^2 \ln^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \times \\ &\times \left(1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \\ &= \left[1 + x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \times \\ &\times \left(1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{x(x-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \\ &\qquad\qquad\qquad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то бесконечное произведение сходится абсолютно для любого $x \neq 0$. Так как n -ое частичное произведение есть

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \cdot \frac{(1+1)^x (1+\frac{1}{2})^x \cdots (1+\frac{1}{n})^x}{(1+x)(1+\frac{x}{2}) \cdots (1+\frac{x}{n})} &= \frac{(n+1)^x}{x(1+x) \cdots (1+\frac{x}{n})} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^x \cdot \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)}, \end{aligned}$$

то

$$G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)} = \Gamma(x), \quad x > 0.$$

Итак, функция $G(x)$ совпадает с функцией $\Gamma(x)$ для $x > 0$, и, следовательно, получено разложение функции $\Gamma(x)$ в бесконечное произведение

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}, \quad x > 0. \quad (10)$$

Так как это произведение сходится для всех отрицательных нецелых x , то можно принять равенство (10) за определение функции $\Gamma(x)$ для таких значений x .

Используя связь $\Gamma(x)$ и $G(x)$, можно непосредственно проверить, что для отрицательных нецелых x справедливо равенство

$$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

График функции $y = \Gamma(x)$ приведен на рис. 17.

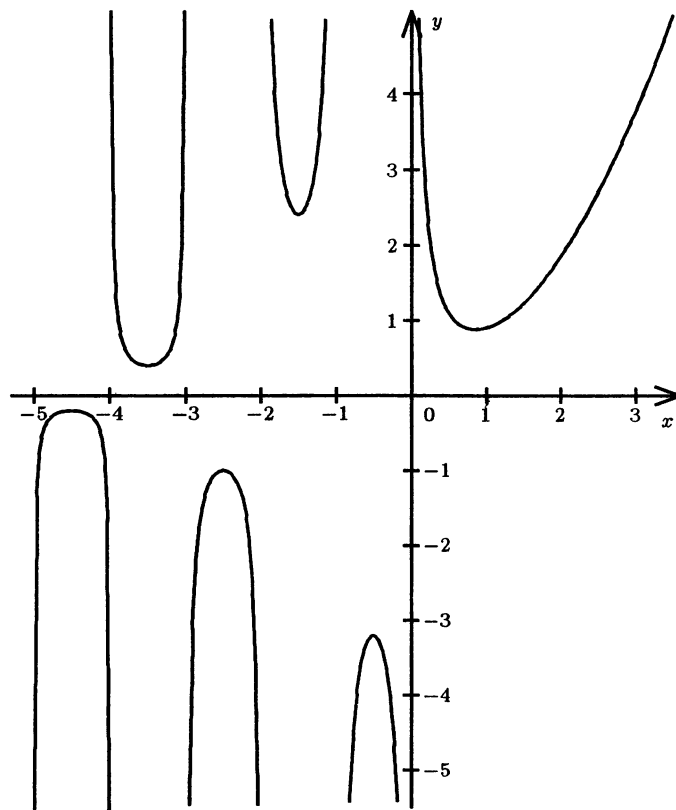


Рис. 17

Пример 7. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2} dx$.

Решение. Используя представление

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{6}{5}-1}}{(1+x)^{\frac{6}{5}+\frac{4}{5}}} dx,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{5}{5}-1}}{(1+x)^{\frac{5}{5}+\frac{4}{5}}} dx = B\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \Gamma\left(\frac{4}{5}\right)}{\Gamma(2)} = \Gamma\left(1+\frac{1}{5}\right) \Gamma\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5} \Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \Gamma\left(\frac{4}{5}\right) = \\ &= \frac{1}{5} \Gamma\left(\frac{1}{5}\right) \Gamma\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Известна формула представления функции $\sin x$ бесконечным произведением

$$\sin x = x \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 m^2}\right), \quad |x| < \infty.$$

Полагая здесь πx вместо x , получаем

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right), \quad |x| < \infty.$$

Поскольку

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

$$\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}}{1 - \frac{x}{n}},$$

то

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-x}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n}\right)} = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{x^2}{n^2}}.$$

Значит,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{x \sin \pi x},$$

т. е.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}, \quad x \neq n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (11)$$

Положив здесь $x = \frac{1}{2}$, получим $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Из формул (2), (9) и (11) следует, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{z^{x-1}}{(1+z)} dz = B(x, 1-x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$0 < x < 1.$$

Пример 8. Определить область существования и вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(a+bx^n)^p} dx$, $n > 0$.

Решение. Введем новую переменную t , полагая $\left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{n}} = x$, тогда $\frac{1}{n} \left(\frac{a}{b}t\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{a}{b} dt = dx$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p} &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p} dt = \\ &= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}}{na^p} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^{\frac{m+1}{n}+p-\frac{m+1}{n}}} dt = \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} \cdot \frac{1}{na^p} B\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, данный интеграл сходится при условии $0 < \frac{m+1}{n} < p$. Заметим, что подобные преобразования являются обратимыми, поэтому из сходимости последнего интеграла следует сходимость исходного.

Таким образом, при решении задач подобного рода можно не выяснять предварительно сходимость заданного интеграла, поскольку она эквивалентна определенности полученных Бета- или Гамма-функций.

Пример 9. Определить область существования и вычислить $I = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$.

Решение. Положим $\sin x = \sqrt{t}$, $t \geq 0$. Тогда $\cos x dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{m+1}{2}-1} (1-t)^{\frac{n+1}{2}-1} dt.$$

Следовательно, данный интеграл сходится при условии $\frac{m+1}{2} > 0$ и $\frac{n+1}{2} > 0$ и его значение равно

$$I = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

Пример 10. Найти площадь области, ограниченной кривой $(x^2 + y^2)^6 = x^4 y^2$.

Решение. Поскольку x и y входят в данное уравнение в четной степени, то кривая симметрична относительно обеих координатных осей. Следовательно, достаточно найти площадь $|D_1|$ области D_1 , ограниченной этой кривой и осями координат и лежащей в области $x \geq 0, y \geq 0$. Введем полярную систему координат, совмещенную с декартовой системой, и сделаем замену $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, тогда уравнение кривой в полярной системе, ограничивающей область D_1 , запишется в виде $r^{12} = r^6 \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi$, т. е. $r^6 = \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |D_1| &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{4}{2} + 1, \frac{2}{2} + 1\right) = \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{12} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{12} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12} \frac{\pi}{\sin \pi/6} = \frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

и площадь всей области, ограниченной данной кривой, есть $4 \cdot \frac{\pi}{6}$, т. е. $\frac{2\pi}{3}$.

Пример 11. Вычислить $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx$.

Решение. Полагая $x^4 = t$, получаем, что

$$I = \frac{1}{64} \int_0^{+\infty} \frac{t^{-3/4} \ln^2 t}{1+t} dt.$$

Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{t^{-3/4} \ln^2 t}{1+t} dt$ равен $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{1}{4}-1} \ln^2 t}{(1+t)^{\frac{1}{4}+(1-\frac{1}{4})}} dt$ и является второй производной функции $B(p, 1-p)$, вычисленной в точке $p = \frac{1}{4}$. Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{64} \left(\frac{d^2}{dp^2} (B(p, 1-p)) \right) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{1}{64} \left(\frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{\pi}{\sin \pi p} \right) \right) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \frac{1}{64} \left(\left(-\frac{\pi^2 \cos \pi p}{\sin^2 \pi p} \right)' \right) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \\ &= -\frac{\pi^2}{64} \left(\frac{-\pi \sin^3 \pi p - 2\pi \sin \pi p \cos^2 \pi p}{\sin^4 \pi p} \right) \Big|_{p=\frac{1}{4}} = \\ &= \frac{\pi^3 \sin^2 \frac{\pi}{4} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{4}}{64 \sin^3 \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64} \cdot \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{3\pi^3 \sqrt{2}}{64}. \end{aligned}$$

Пример 12. Доказать формулу Лежандра

$$\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \Gamma(2x).$$

Решение. Преобразуем интеграл

$$B(x, x) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{x-1} dt$$

следующим образом:

$$B(x, x) = \int_0^1 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 \right]^{x-1} dt = 2 \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t \right)^2 \right]^{x-1} dt$$

и сделаем в нем замену $\frac{1}{2} - t = \frac{1}{2} \sqrt{u}$, тогда получим

$$B(x, x) = \frac{1}{2^{2x-1}} \int_0^1 u^{-1/2} (1-u)^{x-1} du = \frac{1}{2^{2x-1}} B\left(\frac{1}{2}, x\right).$$

Выражая функцию $B(x, y)$ через функцию $\Gamma(x)$, имеем

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(x)}{\Gamma(1/2+x)},$$

откуда получаем искомое соотношение.

Пример 13. В § 4 гл. III было получено соотношение

$$EK' + E'K - KK' = C, \quad C = \text{const} \quad (12)$$

(относительно обозначений см. там же). Для нахождения константы C возьмем частное значение k , например, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Тогда $k' = k$, и значит, $E' = E$, $K' = K$, и тождество (12) примет вид $(2E - K)K = C$. Пропедевывая в интегралах

$$E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}$$

последовательно подстановки $\cos \varphi = t$ и $t^4 = x$, приводим их к виду

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \int_0^1 x^{-3/4} (1-x)^{-1/2} dx + \int_0^1 x^{-1/4} (1-x)^{-1/2} dx \right\} = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \\ K &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-3/4} (1-x)^{-1/2} dx = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{1/4-1} (1-x)^{1/2-1} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$2E - K = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 x^{-1/4} (1-x)^{-1/2} dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right),$$

и тогда

$$\begin{aligned} C &= K(2E - K) = \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{8} \frac{\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(5/4)} \cdot \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пример 14. Доказать, что

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{-\frac{1}{2}},$$

n натуральное.

Решение. Обозначив данное произведение через E , рассмотрим его квадрат

$$E^2 = \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поскольку

$$\Gamma\left(\frac{n-m}{n}\right) \Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}},$$

то

$$E^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin \frac{\pi}{n} \cdot \sin 2\frac{\pi}{n} \cdots \sin(n-1)\frac{\pi}{n}}.$$

Для вычисления $\prod_{p=1}^{n-1} \sin \frac{\pi p}{n}$ рассмотрим тождество

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \prod_{p=1}^{n-1} \left(z - \cos \frac{2p\pi}{n} - i \sin \frac{2p\pi}{n} \right).$$

В пределе при $z \rightarrow 1$ имеем

$$n = \prod_{p=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2p\pi}{n} - i \sin \frac{2p\pi}{n} \right),$$

откуда

$$n = \prod_{p=1}^{n-1} \left| 1 - \cos \frac{2p\pi}{n} - i \sin \frac{2p\pi}{n} \right| = 2^{n-1} \prod_{p=1}^{n-1} \sin \frac{p\pi}{n}.$$

Поэтому $\prod_{p=1}^{n-1} \sin \frac{p\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ и, значит, $E = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$.

Пример 15. Вычислить $I(a) = \int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx$, $a > 0$.

Решение. Заметим, что функция $\ln \Gamma(x)$ непрерывна как функция двух переменных на $(x; a) = (0; +\infty) \times (0; +\infty)$. Та-

ким образом, при любом $a > 0$ интеграл $\int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx$ есть

собственный интеграл, подынтегральная функция в котором непрерывна как функция двух аргументов x и a , а пределы интегрирования — непрерывные функции параметра a . Пре-

дельное значение этого интеграла — интеграл $\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx$ —

является уже несобственным интегралом, так как подынтегральная функция $\ln \Gamma(x)$ является неограниченной на $(0; 1)$.

Из равенства $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ получаем, что $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$, $x \rightarrow 0+$, откуда из равенства $\ln \Gamma(x) = \ln x \Gamma(x) + \ln \frac{1}{x}$, следу-

ет, что $\ln \Gamma(x) \sim \ln \frac{1}{x}$, $x \rightarrow 0+$, и следовательно, $\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx$ сходится.

Дифференцируя данный интеграл по параметру a , имеем

$$I'(a) = \ln \Gamma(1+a) - \ln \Gamma(a) = \ln(a\Gamma(a)) - \ln \Gamma(a) = \ln a,$$

откуда

$$I(a) = a(\ln a - 1) + C, \quad (13)$$

где C — константа.

Интеграл $\int_1^{a+1} \ln \Gamma(x) dx$ стремится к нулю при $a \rightarrow 0$ как непрерывная функция переменной a . Следовательно, для лю-

бого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для любого a , удовлетворяющего условию $0 < a < \delta$, $a < 1$, имеем

$$\left| \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx - \int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx \right| \leq \left| \int_0^a \ln \Gamma(x) dx \right| + \\ + \left| \int_1^{a+1} \ln \Gamma(x) dx \right| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^{a+1} \ln \Gamma(x) dx = \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx.$$

Для вычисления интеграла $I = \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx$ заметим, что

$$I = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx. \text{ Тогда} \\ I = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin \pi x} dx = \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 (\ln \pi - \ln \sin \pi x) dx = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \sin \pi x dx = \\ = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \ln \sin x dx = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx.$$

Для вычисления этого интеграла положим $x = 2t$, тогда

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = \\ = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt.$$

Подставляя в последнем интеграле $t = \frac{\pi}{2} - u$, приведем его

к виду $2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin u \, du$, откуда $I_1 = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I_1$, и значит,
 $I_1 = -\frac{\pi}{2} \ln 2$. Поэтому

$$I = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) \, dx = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) = \ln \sqrt{2\pi}.$$

Переходя к пределу при $a \rightarrow 0+$ в (13), имеем

$$\lim_{a \rightarrow 0+} a(\ln a - 1) + C = \ln \sqrt{2\pi},$$

откуда $C = \ln \sqrt{2\pi}$, и следовательно, $I(a) = \ln \sqrt{2\pi} + a(\ln a - 1)$.

При вычислении многих интегралов большую роль играет так называемая логарифмическая производная функции $\Gamma(x)$ — функция

$$\frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad x > 0,$$

именно, важны различные ее представления в виде интеграла. Рассмотрим тождественное равенство при $x > 0, y > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(y) - B(x, y) &= \Gamma(y) - \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \\ &= \frac{\Gamma(y) \cdot y}{\Gamma(x+y)} \cdot \frac{\Gamma(x+y) - \Gamma(x)}{y} = \frac{\Gamma(1+y)}{\Gamma(x+y)} \cdot \frac{\Gamma(x+y) - \Gamma(x)}{y}. \end{aligned}$$

Если перейти к пределу при $y \rightarrow 0+$ в этом равенстве, то в силу дифференцируемости функции $\Gamma(x)$ и ее непрерывности получаем, что

$$\lim_{y \rightarrow 0+} (\Gamma(y) - B(x, y)) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Поскольку $\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} \, dt$, $B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}} \, dt$,

то

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= \lim_{y \rightarrow 0+} \int_0^{+\infty} t^{y-1} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^{x+y}} \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^x} \right) \frac{dt}{t}.\end{aligned}\quad (14)$$

Для обоснования законности предельного перехода заметим, что функция

$$f(t, y) = \begin{cases} \frac{1}{t^{1-y}} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^{x+y}} \right), & t \neq 0, \\ x+y-1, & t = 0, \end{cases}$$

непрерывна как функция двух переменных на множестве

$[0; t] \times [0; +\infty)$ и интеграл $\int_0^{+\infty} t^{y-1} \left(e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^{x+y}} \right) dt$ сходится равномерно на $\left[0; \frac{x}{2}\right]$, так как при $t \geq 1$ и $y \in \left[0; \frac{x}{2}\right]$ справедливо неравенство

$$t^{y-1} \left| e^{-t} - \frac{1}{(1+t)^{x+y}} \right| \leq t^{\frac{x}{2}-1} \left| \frac{1}{(1+t)^x} - e^{-t} \right|$$

и $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1-\frac{x}{2}}} \left(\frac{1}{(1+t)^x} - e^{-t} \right) dt$ сходится.

Из формулы (14) получаем, что (полагая $t = e^u - 1$)

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)^x} \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du - \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{1-e^{-u}} du \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-ux}}{1-e^{-u}} \right) du + \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{e^{-ux}}{1-e^{-u}} du \right\}.\end{aligned}$$

Поскольку для $0 < \varepsilon < x$

$$\frac{e^{-ux}}{1 - e^{-u}} = \frac{e^{-ux}}{e^{-u}(e^u - 1)} = \frac{1}{e^{u(x-1)}(e^u - 1)} < \frac{1}{(1 + \varepsilon)^{x-1} \cdot \varepsilon};$$

$$\left| \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{e^{-ux}}{1 - e^{-u}} du \right| < \frac{\varepsilon - \ln(1 + \varepsilon)}{\varepsilon(1 + \varepsilon)^{x-1}} < \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)^{x-1}};$$

$$\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2), \varepsilon \rightarrow 0+, \text{ то } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\ln(1+\varepsilon)}^{\varepsilon} \frac{e^{-ux}}{1 - e^{-u}} du = 0$$

и, значит,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-ux}}{1 - e^{-u}} \right) du.$$

Полагая в (14) $x = 1$, имеем

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = \Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-t} - \frac{1}{1+t} \right) \frac{dt}{t}.$$

Вычитая это равенство из (14), получим

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^x} \right) \frac{dt}{t}.$$

Введя новую неизвестную $\frac{1}{1+t} = z$, получаем формулу Гаусса

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \Gamma'(1) = \int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1 - z} dz. \quad (15)$$

Поскольку $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots$, $|z| < 1$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1 - z} dz &= \int_0^1 (1 - z^{x-1})(1 + z + z^2 + \dots) dz = \\ &= \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} (z^m - z^{m+x-1}) dz. \end{aligned}$$

При любом $x > 0$ члены ряда, стоящего под знаком интеграла, являются непрерывными и знакопостоянными на $[0; 1]$ функциями, причем сумма ряда, равная $\frac{1 - z^{x-1}}{1 - z}$, непрерывна на $[0; 1]$ при любом x . Следовательно, этот ряд в силу теоремы Дини сходится равномерно на $[0; 1]$ и его можно интегрировать почленно.

Итак,

$$\int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1 - z} dz = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+x} \right)$$

и

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \Gamma'(1) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+x} \right). \quad (16)$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{d^2 \ln \Gamma(x)}{dx^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^2}$$

и вообще

$$\frac{d^n \ln \Gamma(x)}{dx^n} = (-1)^n (n-1)! \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+x)^n}.$$

Дифференцировать почленно ряды по x можно, т. к. они сходятся равномерно вследствие оценки $\frac{1}{(m+x)^n} < \frac{1}{m^n}$. Интегрируя почленно ряд (16) по x от 1 до $x > 0$ (это законно в силу его равномерной сходимости), имеем равенство

$$\ln \Gamma(x) - \Gamma'(1)(x-1) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{m+1} - \ln \frac{x+m}{m+1} \right).$$

Полагая здесь $x = 2$ и учитывая, что $\ln \Gamma(2) = 0$, получаем равенство

$$\Gamma'(1) = - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m+1} - \ln \frac{2+m}{m+1} \right),$$

т. е.

$$\Gamma'(1) = - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - \ln \frac{1+m}{m} \right).$$

Частичная сумма S_n этого ряда равна

$$- \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

Следовательно, в силу равенства

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = C_{\text{Э}}$$

где $C_{\text{Э}}$ — постоянная Эйлера, получаем, что

$$\Gamma'(1) = -C_{\text{Э}}, \quad (C_{\text{Э}} \simeq 0,577). \quad (17)$$

Пример 16. Вычислить $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \ln^2 x \, dx$.

Решение. Полагая $x^2 = t$, перепишем исходный интеграл в виде $2 \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} \ln^2 t \, dt$. Рассмотрим функцию $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$. Последовательно имеем

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln t \cdot t^{x-1} e^{-t} \, dt, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \ln^2 t \cdot t^{x-1} e^{-t} \, dt,$$

и следовательно, данный интеграл равен $2\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$. Значение

$\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right)$ выводится из формулы (16):

$$\frac{d^2 \ln \Gamma(x)}{dx^2} = \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right)' = \frac{\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{\Gamma^2(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

При $x = \frac{1}{2}$ имеем

$$\frac{\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - (\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right))^2}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{(2n+1)^2}.$$

Поскольку по формулам (15) и (17)

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} &= C_{\mathfrak{E}} + \int_0^1 \frac{1-t^{-1/2}}{1-t} dt = C_{\mathfrak{E}} - \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} = \\ &= C_{\mathfrak{E}} - 2 \ln 2,\end{aligned}$$

то

$$\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}(C_{\mathfrak{E}} - 2 \ln 2).$$

Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} \right) = \frac{\pi^2}{8}$$

и

$$\begin{aligned}\Gamma''\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{4 \frac{\pi^2}{8} \cdot \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) + (\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right))^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \frac{\pi^2}{2} \sqrt{\pi} + (\sqrt{\pi})^2 (C_{\mathfrak{E}} - 2 \ln 2)^2 = \pi \left(\frac{\pi \sqrt{\pi}}{2} + (C_{\mathfrak{E}} - 2 \ln 2)^2 \right).\end{aligned}$$

Пример 17. Вычислить интеграл

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = \int_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x) \ln x} dx,$$

$$\alpha > -1, \beta > -1, \gamma > -1, \quad \alpha + \beta > -1, \alpha + \gamma > -1, \\ \beta + \gamma > -1, \quad \alpha + \beta + \gamma > -1.$$

Решение. По формулам (15) и (17) имеем, что

$$\frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = -C_{\mathfrak{E}} + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt.$$

Значит,

$$\int_0^1 \frac{t^p - t^q}{1-t} dt = \frac{d \ln \Gamma(q+1)}{dq} - \frac{d \ln \Gamma(p+1)}{dp}.$$

Рассмотрим интеграл $I = \int_0^1 \frac{(1-t^\alpha)(1-t^\beta)(1-t^\gamma)}{(1-t)\ln t} dt$. Его производная по α равна $\frac{dI}{d\alpha} = - \int_0^1 \frac{t^\alpha(1-t^\beta)(1-t^\gamma)}{1-t} dt$. Поскольку

$$t^\alpha(1-t^\beta)(1-t^\gamma) = (t^\alpha - t^{\alpha+\beta}) - (t^{\alpha+\gamma} - t^{\alpha+\beta+\gamma}),$$

то

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} &= - \left(\frac{d \ln \Gamma(\alpha + \beta + 1)}{d\alpha} - \frac{d \ln \Gamma(\alpha + 1)}{d\alpha} \right) + \\ &+ \left(\frac{d \ln \Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 1)}{d\alpha} - \frac{d \ln \Gamma(\alpha + \gamma + 1)}{d\alpha} \right) = \\ &= \frac{d}{d\alpha} \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} \end{aligned}$$

и

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} + C(\beta, \gamma).$$

При $\alpha = 0$ имеем $I(0, \beta, \gamma) = 0$, следовательно,

$$C(\beta, \gamma) = - \ln \frac{\Gamma(1)\Gamma(\beta + \gamma + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\gamma + 1)}$$

и

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta, \gamma) &= \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)} - \\ &- \ln \frac{\Gamma(\beta + \gamma + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\gamma + 1)} = \\ &= \ln \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\gamma + 1)\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)\Gamma(\alpha + \gamma + 1)\Gamma(\beta + \gamma + 1)}. \end{aligned}$$

§6. Функции Бесселя

Уравнение

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (1)$$

называется уравнением Бесселя, а любое его решение — функцией Бесселя (цилиндрической функцией).

Решение уравнения Бесселя

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)}$$

и

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k! \Gamma(k - \nu + 1)}$$

называются функциями Бесселя первого рода с индексом ν . Если ν не является целым числом, то $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы и тогда общее решение уравнения (1) есть

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. При целом ν функции $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно зависимы, причем если $\nu = n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

В случае натурального ν ($\nu = n$) функция Бесселя записывается в виде ряда

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!},$$

который абсолютно сходится на всей числовой прямой.

Простейшими функциями $J_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, являются $J_0(x)$ и $J_1(x)$. Все другие функции с целым индексом выражаются через них с помощью рекуррентного соотношения

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Через функции Бесселя выражаются и их производные:

$$J'_0(x) = -J_1(x),$$

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

Пример 18. Докажем, что функция

$$W(x, t) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})}, \quad t \neq 0,$$

является производящей функцией для функций Бесселя с целым индексом.

Решение. Разложение функции $e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})}$ в ряд по степеням t получим как произведение двух степенных рядов соответственно для функций $e^{\frac{xt}{2}}$ и $e^{-\frac{x}{2t}}$, объединяя члены, содержащие одинаковые степени t . Имеем

$$e^{\frac{xt}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{xt}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{k!}, \quad e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \left(\frac{x}{2}\right)^i t^{-i}.$$

Перемножая эти абсолютно сходящиеся ряды, получим абсолютно сходящийся двойной ряд

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+i} \frac{(-1)^i}{k!i!} t^{k-i}, \quad t \neq 0.$$

Поскольку у такого ряда в силу его абсолютной сходимости можно собирать члены произвольным образом в скобки, то

преобразуем этот двойной ряд в повторный ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n t^n$, где

$$A_n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i+n} \cdot \frac{(-1)^i}{i!(i+n)!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$A_{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2i-n} \cdot \frac{(-1)^i}{i!(i-n)!}, \quad n = -1, -2, \dots$$

Из вида $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ находим, что $A_n = J_n$, $A_{-n} = J_{-n}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} W(x, t) &\equiv e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = \\ &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(x) (t^n + (-1)^n t^{-n}), \quad t \neq 0. \end{aligned}$$

Функции Бесселя второго рода определяются формулами

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu},$$

если ν не является целым числом, и

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x),$$

если n — целое число.

Функции $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ всегда линейно независимы.

Для функций Бесселя $J_\nu(x)$ с произвольным индексом также имеют место рекуррентные формулы, позволяющие находить значения функций Бесселя и их производных через функции Бесселя, например,

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x),$$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x),$$

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

Другие формулы такого типа, а также многочисленные свойства функций Бесселя приведены в задачах.

Специальный класс цилиндрических функций образуют цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа. В этом случае они могут быть выражены через элементарные функции.

Пример 19. Выразим через элементарные функции функцию $J_{1/2}(x)$.

Решение. По определению $J_{1/2}(x)$ имеем

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+3/2)} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1} \cdot k! \Gamma(k+3/2)}. \end{aligned}$$

Поскольку $\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) = \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}} \sqrt{\pi}$, то

$$2^{2k+1} \cdot k! \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) = 2^k \cdot k! (2k+1)!! \sqrt{\pi} = (2k+1)! \cdot \sqrt{\pi},$$

и следовательно, $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$. Так как $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ есть разложение в ряд функции $\sin x$, то окончательно имеем $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x$. Аналогично доказывается, что $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$.

Используя рекуррентные формулы, получим, что

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} x^{n+1/2} \frac{d^n}{d(x^2)^n} \left(\frac{\sin x}{x}\right), \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

В различных приложениях полезно знать интегральное представление функций Бесселя (см. задачу 248)

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Пример 20. Вычислить

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} J_0(\beta x) dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Решение. Поскольку $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \varphi) d\varphi$, то данный интеграл можно записать в виде

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} J_0(\beta x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\beta x \sin \varphi) d\varphi \right) dx.$$

Так как $|e^{-\alpha x} \cos(\beta x \sin \varphi)| \leq e^{-\alpha x}$, то интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x \sin \varphi) dx$$

сходится равномерно относительно φ на отрезке $[0; \pi]$, поэтому

$$\begin{aligned} I(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x \sin \varphi) dx \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\alpha d\varphi}{\alpha^2 + \beta^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\pi \alpha} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin^2 \varphi} = \\ &= \frac{1}{\pi \alpha} \cdot \frac{2\pi}{2\sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{aligned}$$

Пример 21. Вычислить

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad \nu > -1.$$

Решение. Заменяем функцию Бесселя степенным рядом

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \text{ и проинтегрируем почленно,}$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx &= \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} x^{\nu+1} dx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{bx}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2k} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} x^{2\nu+2k+1} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2k} \frac{1}{2a^{2\nu+2k+2}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\nu+k} dt = \\ &= \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^k}{k!} = \frac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \end{aligned}$$

Законность перестановки порядка интегрирования и суммирования следует из равномерной сходимости ряда, стоящего под знаком интеграла.

При $x \rightarrow +\infty$ для функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ справедливы асимптотические формулы

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right),$$

$$J_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Отсюда можно найти приближенные значения корней функций $J_{\pm\nu}(x)$. Так, например, для функции $J_0(x)$ приближенные значения корней находятся из уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

откуда $x_k - \frac{\pi}{4} \simeq \pi k + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, т. е. $x_k \simeq \pi k + \frac{3}{4}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Известно, что при больших k корни функций $J_n(x)$ удовлетворяют асимптотическому равенству

$$x_k = (2k + n)\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Важность изучения функций Бесселя определяется большим их применением в задачах математической физики. Так, например, простейшая краевая задача для уравнения Бесселя на отрезке $[0; r_0]$ связана с задачей о собственных колебаниях круглой мембраны, т. е. с задачей нахождения функции $V(r, \varphi)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \lambda V = 0 \quad (2)$$

и краевым условиям

$$V(r, \varphi)|_{r=r_0} = 0, \quad |V(r, \varphi)| < \infty, \quad V(r, \varphi) \not\equiv 0.$$

Полагая $V(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ и разделяя переменные, получаем для $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ уравнения

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0$$

и

$$\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) \right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{r^2} \right) R = 0, \quad R(r_0) = 0.$$

Условие периодичности для $\Phi(\varphi)$ дает $\nu = n^2$, где n — целое. Таким образом, функция $R(r)$ должна определяться из уравнения Бесселя

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n^2}{r} R + \lambda r R = 0$$

при граничном условии $R(r_0) = 0$ и естественном граничном условии ограниченности в точке $r = 0$: $|R(0)| < \infty$.

Полагая $x = \sqrt{\lambda}r$, $y(x) = R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$, получим уравнение

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0, \quad y(x) \neq 0,$$

с условием

$$y(\sqrt{\lambda}r_0) = 0, \quad |y(0)| < \infty.$$

Отсюда находим $y(x) = AJ_n(x)$, и в силу граничного условия $y(\sqrt{\lambda}r_0) = 0$ имеем $J_n(r_0\sqrt{\lambda}) = 0$.

Это уравнение относительно λ имеет бесконечное множество нулей $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \dots, \mu_m^{(n)}, \dots$, и значит, уравнение (2) имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_m^{(n)} = \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} \right)^2, \quad m = 1, 2, \dots,$$

которым соответствуют собственные функции

$$R(r) = AJ_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right).$$

Функции $J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right)$ ортогональны с весом r , т. е.

$$\int_0^{r_0} J_n \left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0} r \right) J_n \left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0} r \right) r dr = 0 \quad \text{при } m_1 \neq m_2.$$

Кроме того, имеем равенства

$$\int_0^{r_0} J_n^2 \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) r dr = \frac{r_0^2}{2} [J_n'(\mu_m^{(n)})]^2,$$

в частности,

$$\int_0^{r_0} J_0^2 \left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0} r \right) r dr = \frac{r_0^2}{2} J_1^2(\mu_m^{(0)}).$$

В силу общих свойств собственных функций краевых задач имеет место

Теорема. Любая дважды дифференцируемая функция $f(r)$, ограниченная в окрестности точки $r = 0$ и обращающаяся в нуль при $r = r_0$ может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right),$$

где

$$A_m = \frac{\int_0^{r_0} f(r) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0} r \right) r dr}{\|J_n\|^2}, \quad \|J_n\|^2 = \frac{r_0^2}{2} (J_n'(\mu_m^{(n)}))^2.$$

Эта теорема является аналогом теоремы о разложении в ряд Фурье по ортогональной системе, перенесенной на системы функций ортогональных с весом.

Аналогично предыдущей решаются задачи об охлаждении цилиндра, о дифракции плоской электромагнитной волны, падающей на бесконечно длинный проводящий цилиндр, о поле точечного заряда q , помещенного вблизи прямолинейного края проводящей пластинки, находящейся при нулевом потенциале и т. д.

Все эти задачи и им подобные основываются на разложении в ряд заданной функции по цилиндрическим функциям, причем вид разложения определяется конкретными условиями

ми задачи. На первом месте среди этих разложений находится разложение вида

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m J_{\nu} \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right), \quad 0 < r < a, \quad (3)$$

где $f(r)$ — заданная в интервале $(0; a)$ функция, $J_{\nu}(x)$ — функция Бесселя индекса $\nu > -\frac{1}{2}$, $x_{\nu m}$ — положительные корни уравнения $J_{\nu}(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания.

Коэффициенты C_m находятся из свойства ортогональности с весом r системы функций $J_{\nu} \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right)$, $m = 1, 2, \dots$:

$$\int_0^a r J_{\nu} \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right) J_{\nu} \left(x_{\nu n} \frac{r}{a} \right) dr = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_0^a r J_{\nu}^2 \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right) dr = \frac{a^2}{2} J_{\nu}'^2(x_{\nu m}) = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(x_{\nu m}).$$

Предполагая, что разложение (3) возможно, находим коэффициенты C_m по формуле

$$C_m = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu m})} \int_0^a f(r) r J_{\nu} \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right) dr, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

путем умножения (3) на $r J_{\nu} \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right)$ и интегрирования по промежутку $(0; a)$.

Условия, обеспечивающие сходимость рассматриваемого ряда к функции $f(r)$ даются следующей теоремой.

Теорема. Пусть функция $f(r)$ определена на $[0; a]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(r)$ кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию на любом отрезке $[\varepsilon; a]$, $0 < \varepsilon < a$;

2) интеграл $\int_0^a \sqrt{r} |f(r)| dr$ сходится.

Тогда ряд (3) с коэффициентами, вычисленными по формуле (4), сходится и имеет своей суммой $\frac{1}{2}[f(r+0) + f(r-0)]$.

Из интегральных разложений по функциям Бесселя важное место занимает разложение в интеграл функции $f(r)$, определенной на $(0; +\infty)$, т. е. представление этой функции в виде

$$f(r) = \int_0^{+\infty} \lambda J_\nu(\lambda r) d\lambda \int_0^{+\infty} \rho J_\nu(\lambda \rho) f(\rho) d\rho, \quad (5)$$

$$0 < r < +\infty, \quad \nu > -\frac{1}{2}.$$

Теорема. Пусть функция $f(r)$ удовлетворяет условиям

1) $f(r)$ кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию на любом отрезке $[0; a]$, $a > 0$;

2) интеграл $\int_0^{+\infty} \sqrt{r} |f(r)| dr$ сходится.

Тогда равенство (5) имеет место для любой точки непрерывности функции $f(r)$ и величина интеграла (5) равна $\frac{1}{2}[f(r_0+0) + f(r_0-0)]$ в точке разрыва r_0 функции $f(r)$.

§7. Многочлены Лежандра

Многочлены Лежандра определяются формулой

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ P_0 = 1.$$

Если воспользоваться формулой бинома Ньютона

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k},$$

то для $P_n(x)$ имеем выражение

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}. \quad (1)$$

В частности, имеем

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \\ P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \\ P_{2n+1}(0) = 0.$$

Выпишем несколько полиномов Лежандра:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \\ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Пример 22. Докажем, что функция

$$\varphi(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$$

является производящей функцией для многочленов Лежандра, т. е. что имеет место разложение

$$(1 - 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x).$$

Решение. Разложим функцию $\varphi(x, t)$ в ряд по степеням t с коэффициентами $\alpha_n(x)$ при t^n :

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \alpha_0(x) + t\alpha_1(x) + \dots + t^n\alpha_n(x).$$

При $x = 1$ имеем $\varphi(1, t) = (1 - t)^{-1}$, поэтому при $x = 1$ разложение должно совпадать с разложением

$$(1 - t)^{-1} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots, \quad |t| < 1,$$

откуда в силу единственности разложения в степенной ряд получаем, что $\alpha_n(1) = 1$. Покажем, что $\alpha_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \quad (2)$$

Непосредственно проверяется, что функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + (1 - x^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2t \frac{\partial \varphi}{\partial t} - 2x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Подставляя в это уравнение вместо функции $\varphi(x, t)$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x)t^n$, имеем

$$t^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\alpha_n(x)t^n,$$

$$t \varphi'_t = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n(x)t^n,$$

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x^2)\alpha''_n(x)t^n,$$

$$2x \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x\alpha'_n(x)t^n,$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\alpha_n(x)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} (1 - x^2)\alpha''_n(x)t^n + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} 2n\alpha_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2x\alpha'_n(x)t^n = 0. \end{aligned}$$

Собирая коэффициенты при t^n , имеем

$$(1-x^2)\alpha_n''(x) - 2x\alpha_n'(x) + n(n+1)\alpha_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Значит, $\alpha_n(x)$ — решение уравнения (2). Поскольку $\alpha_n(1) = 1$, то на основании задачи 282 имеем $\alpha_n(x) = P_n(x)$, что и требовалось доказать.

Во многих задачах, связанных с приложением полиномов Лежандра, возникает необходимость представления функции $f(x)$, $x \in (-1; 1)$, в виде ряда по многочленам Лежандра:

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$. Коэффициенты C_n этого разложения находятся из условия ортогональности (см. задачу 6 гл. II § 5) и равны

$$C_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx.$$

Достаточное условие разложения функции $f(x)$, $x \in (-1; 1)$, по системе полиномов Лежандра устанавливается теоремой.

Теорема. Если $f \in \tilde{R}^2(-1; 1)$ и в точке $x_0 \in (-1; 1)$ функция f удовлетворяет условию Дини (см. гл. II § 1), то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)$, где C_n вычисляются по формулам (2), сходится

в точке x_0 к значению $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$.

Заметим, что все условия этой теоремы выполнены, если функция f является кусочно-гладкой на отрезке $[-1; 1]$.

Пример 23. Разложить функцию $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \in (-1; 1)$, в ряд по системе многочленов Лежандра.

Решение. На интервале $(-1; 1)$ функция $f(x)$ имеет непрерывную производную и ее квадрат интегрируем на $(-1; 1)$. Для вычисления коэффициентов

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x} P_n(x) dx$$

можно воспользоваться формулой (1) представления многочленов $P_n(x)$ через ряд. Однако полезен прием, часто встре-

чающийся при решении такого рода задач. Будем исходить из представления производящей функции многочленов Лежандра $\varphi(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-1/2}$. Умножим обе части равенства

$$(1 - 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$$

на $\sqrt{1-x}$ и проинтегрируем от -1 до 1 . Получим, что

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-2tx+t^2}} dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 P_n(x) \sqrt{1-x} dx.$$

Законность почленного интегрирования ряда следует из его равномерной сходимости относительно x на $[-1; 1]$, поскольку $|P_n(x)| \leq 1$, $|x| \leq 1$, (см. задачу 283) и ряд мажорируется

сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$. Далее имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-2tx+t^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2t}} \left(1+t - \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right).$$

Разложим эту функцию в ряд по степеням t . Имеем

$$\begin{aligned} \ln \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} &= \ln(1+\sqrt{t}) - \ln(1-\sqrt{t}) = \\ &= \left(\sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^2}{2} + \frac{(\sqrt{t})^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(\sqrt{t})^n}{n} + \dots \right) - \\ &- \left(-\sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^2}{2} - \frac{(\sqrt{t})^3}{3} - \dots - \frac{(\sqrt{t})^n}{n} - \dots \right) = \\ &= 2 \left(\sqrt{t} + \frac{(\sqrt{t})^3}{3} + \dots + \frac{(\sqrt{t})^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2t}} \left(1+t - \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2t}} \left(1+t - (1-t)^2 \times \right. \\ &\times \left. \left(1 + \frac{t}{3} + \frac{t^2}{5} + \dots + \frac{t^n}{2n+1} + \dots \right) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}t} \left(1 + t - 1 - \frac{t}{3} - \frac{t^2}{5} - \dots - \frac{t^n}{2n+1} + 2t + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{3}t^2 + \dots + \frac{2t^{n+1}}{2n+1} - t^2 - \frac{t^3}{3} - \dots - \frac{t^{n+2}}{2n+1} - \dots \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{4}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} \right),
\end{aligned}$$

откуда

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x} P_0(x) dx = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x} P_n(x) dx = \frac{-4\sqrt{2}}{(4n^2-1)(2n+3)}$$

и значит, поскольку $C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x} P_n(x) dx$, то

$$\sqrt{1-x} = \frac{2}{3} \sqrt{2} P_0(x) - 2\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}, \quad |x| < 1.$$

§8. Полиномы Чебышева

Полиномы Чебышева (первого рода) для $|x| \leq 1$ определяются при помощи равенства

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, |x| \leq 1.$$

Они находят широкое применение в теории приближений.

Так, например, многочлен $\frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x)$ является многочленом степени n со старшим коэффициентом, равным единице, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке $[-1; 1]$, т. е. величина $h = \max_{x \in [-1, 1]} |Q_n(x)|$ принимает наименьшее значение при

$$Q_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot T_n(x).$$

Пример 24. Докажем, что производящей функцией для полиномов Чебышева является функция

$$\Phi(t, x) = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}, \quad |x| \leq 1, |t| < 1.$$

Решение. Применяя формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, получим, что

$$\Psi(t, \varphi) = \frac{1 - t \cos \varphi}{1 - 2t \cos \varphi + t^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - te^{i\varphi}} + \frac{1}{1 - te^{-i\varphi}} \right].$$

Разложим $\Psi(t, \varphi)$ в ряд по степеням t , $|t| < 1$. Имеем

$$\Psi(t, \varphi) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{in\varphi} + \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{-in\varphi} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos n\varphi.$$

Положим $\varphi = \arccos x$, тогда $x = \cos \varphi$ и

$$\Psi(t, \varphi) = \Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n \arccos x) t^n,$$

откуда и следует необходимое утверждение.

Приведем несколько первых многочленов Чебышева (первого рода):

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1. \end{aligned}$$

Справедлива основная теорема о разложимости функции $f(x)$ по системе многочленов Чебышева.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ определена на $[-1; 1]$ и $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Если $g \in \tilde{R}^2(-1; 1)$ и в точке $x_0 \in (-1; 1)$ функция f удовлетворяет условию Дини (см. гл. II § 1), то ряд $\frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n T_n(x)$, где $C_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$, сходится к $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$.

Заметим, в частности, что условие Дини выполнено в точке x_0 , если существуют обе односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

Чтобы получить разложение некоторой функции $f(x)$ в ряд по многочленам Чебышева, достаточно разложить четную функцию $F(\varphi) = f(\cos \varphi)$ в ряд Фурье по косинусам.

Так, например, из разложения

$$\ln \left(2 \cos \frac{\varphi}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos n\varphi}{n}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

полагая в нем $\varphi = \arccos x$, $|x| \leq 1$, имеем

$$\ln(1+x) = -\ln 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} T_n(x).$$

Из равенства

$$\frac{\pi^2 - 2\pi\varphi}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\varphi}{(2n+1)^2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

имеем разложения

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2}, \quad |x| \leq 1,$$

$$\arcsin x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_{2n+1}(x)}{(2n+1)^2}, \quad |x| \leq 1.$$

Используя разложение

$$|\sin \varphi| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\varphi}{4n^2 - 1}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi,$$

имеем

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{2n}(x)}{4n^2 - 1}, \quad |x| \leq 1,$$

и из разложения

$$\frac{1}{2} \ln \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\varphi}{2n-1}, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

имеем

$$\frac{1}{4} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1}, \quad |x| < 1.$$

Функции

$$u_n(x) = \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

ортogonalны на отрезке $[-1; 1]$ с весом $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$. Эти функции называются ортогональными многочленами Чебышева второго рода. Выпишем несколько первых из этих многочленов:

$$u_0(x) = 1, \quad u_1(x) = 2x, \quad u_2(x) = 4x^2 - 1,$$

$$u_3(x) = 8x^3 - 4x, \quad u_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1,$$

$$u_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x, \quad u_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1.$$

§9. Многочлены Чебышева—Лагерра

Многочлены Чебышева—Лагерра определяются формулой

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n(e^{-x} x^n)}{dx^n}$$

(или иногда формулой $L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^x \frac{d^n(e^{-x} x^n)}{dx^n}$). Приведем несколько первых из этих многочленов:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = -x + 1, \quad L_2(x) = x^2 - 4x + 2,$$

$$L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6,$$

$$L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24.$$

Функция $\varphi(x, t) = \frac{1}{1-t} e^{\frac{-xt}{1-t}}$ является производящей функцией для многочленов Чебышева—Лагерра, т. е.

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

В приложениях важное место занимают так называемые обобщенные полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$, определяемые по формуле

$$L_n^\alpha(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n(e^{-x} x^{n+\alpha})}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \alpha > -1.$$

Приведем несколько из этих полиномов:

$$L_0^\alpha(x) = 1, \quad L_1^\alpha(x) = 1 + \alpha - x,$$

$$L_2^\alpha = \frac{1}{2} \{ (1 + \alpha)(2 + \alpha) - 2(2 + \alpha)x + x^2 \}.$$

Применяя правило Лейбница для выражения полинома Лагерра n -го порядка, получаем

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1)} \frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}.$$

Производящей функцией для полиномов Лагерра является функция

$$w(x, t) = (1 - t)^{-\alpha-1} \cdot e^{-\frac{xt}{1-t}},$$

т. е.

$$\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) t^n, \quad |t| < 1.$$

Для достаточно широкого класса функций справедлива теорема разложения функции по системе обобщенных полиномов Лагерра.

Теорема. Пусть $f(x)$ определена на $(0; +\infty)$, является кусочно-гладкой на любом промежутке $(0; a)$, $a > 0$, и интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha} f^2(x) dx \text{ сходится.}$$

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n^{\alpha}(x)$, $0 < x < \infty$, с коэффициентами

$$C_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(x) dx$$

сходится и его сумма равна $f(x)$ в точке непрерывности этой функции и равна $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$ в точке ее разрыва x_0 .

Пример 25. Разложить функцию $y = e^{-ax}$, $a > -\frac{1}{2}$, по системе многочленов Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$.

Решение. Положим, что $e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n^{\alpha}(x)$, тогда

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-x} x^{\alpha} L_n^{\alpha}(x) dx = \\ &= \frac{n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-x} x^{\alpha} \frac{e^x}{n!} x^{-\alpha} \frac{d^n(e^{-x} x^{n+\alpha})}{dx^n} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{+\infty} e^{-ax} (e^{-x} x^{n+\alpha})^{(n)} dx = \\
&= \frac{a^n}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \int_0^{+\infty} e^{-(a+1)x} x^{n+\alpha} dx = \\
&= \frac{a^n}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{(a + 1)^{n+\alpha+1}} \quad ((a + 1)x = t).
\end{aligned}$$

Поэтому

$$e^{-ax} = \frac{1}{(a + 1)^{1+\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a + 1} \right)^n L_n^\alpha(x), \quad 0 \leq x < \infty.$$

Полученное разложение можно найти, если в производящую функцию для полиномов $L_n^\alpha(x)$ вместо t подставить $\frac{a}{a + 1}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1 - t)^{1+\alpha}} e^{-\frac{xt}{1-t}} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{a+1}\right)^{1+\alpha}} e^{-\frac{x \frac{a}{a+1}}{1 - \frac{a}{a+1}}} = \\
&= (a + 1)^{1+\alpha} e^{-ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{a + 1} \right)^n L_n^\alpha(x).
\end{aligned}$$

§10. Многочлены Чебышева—Эрмита

Многочлены Чебышева—Эрмита определяются формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Выполнив дифференцирование, находим, что

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, & H_1(x) &= 2x, & H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, & H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{aligned}$$

и т. д.

В общем виде имеем

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k} n!}{k!(n-2k)!}.$$

В частности, получаем $H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}$ и $H_{2n+1}(0) = 0$.

Система функций $H_n(x)$ ортогональна с весом e^{-x^2} на промежутке $(-\infty; +\infty)$ (см. задачу 352).

Теорема. Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty; +\infty)$ и удовлетворяет условиям

- 1) $f(x)$ кусочно-гладкая на любом промежутке $(-a; a)$;
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx$ существует.

Тогда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x)$, $|x| < \infty$, с коэффициентами

$$C_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} H_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

сходится к функции $f(x)$ в каждой точке непрерывности этой функции и к $\frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)]$ в точке разрыва x_0 .

Пример 26. Разложить функцию $f(x) = e^{-a^2 x^2}$ по системе $H_n(x)$.

Решение. Имеем $e^{-a^2 x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x)$, где

$$C_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} e^{-x^2} H_n(x) dx.$$

Так как функции $H_n(x)$ с нечетным n нечетные, а функция $e^{-a^2 x^2 + x^2}$ четная, то $C_{2n-1}(x) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Итак, необходимо вычислить

$$C_{2n} = \frac{1}{2^{2n} (2n)! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a^2+1)x^2} H_{2n}(x) dx.$$

Для вычисления этого интеграла заменим полином $H_{2n}(x)$ его интегральным представлением (см. задачу 349). Тогда имеем

$$\begin{aligned} C_{2n} &= \frac{2 \cdot (-1)^n}{\pi (2n)!} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2xt dx = \\ &= \frac{2 \cdot (-1)^n}{\sqrt{\pi} \cdot (2n)! a} \int_0^{+\infty} e^{-t^2(1+a^2)} t^{2n} dt = \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi} (2n)!} \frac{a^{2n+1}}{(1+a^2)^{n+1/2}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{n-1/2} ds = \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi} (2n)!} \frac{a^{2n}}{(1+a^2)^{n+1/2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^{2n} n! (1+a^2)^{n+1/2}}. \end{aligned}$$

В силу того, что оба несобственных интеграла сходятся абсолютно, возможно изменить порядок интегрирования. Итак,

$$e^{-a^2 x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n}}{2^{2n} n! (1+a^2)^{n+1/2}} H_{2n}(x), \quad |x| < \infty.$$

Пример 27. Разложить функцию $f = e^{ax}$ по системе функций $H_n(x)$.

Решение. Имеем $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n(x)$, где

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+ax} H_n(x) dx = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n} dx = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}} \left(e^{ax} \frac{d^{n-1}(e^{-x^2})}{dx^{n-1}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \right. \\ &\quad \left. - a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^{n-1}(e^{-x^2})}{dx^{n-1}} e^{ax} dx \right) = \dots = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} (-1)^n a^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+ax} dx = \\ &= \frac{a^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\frac{a}{2})^2} \cdot e^{\frac{a^2}{4}} dx = \frac{a^n}{2^n \cdot n!} \sqrt{\pi} e^{\frac{a^2}{4}}. \end{aligned}$$

Итак,

$$e^{ax} = e^{\frac{a^2}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{2^n n!} H_n(x), \quad |x| < \infty.$$

Полученное разложение можно вывести, используя производящую функцию для полиномов $H_n(x)$, полагая $t = \frac{a}{2}$ в равенстве (1) (см. пример 28).

Пример 28. Докажем, что производящей функцией для многочленов Чебышева—Эрмита является функция

$$\varphi(x, t) = e^{2xt-t^2},$$

т. е. имеет место равенство

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \quad |t| < \infty. \quad (1)$$

Решение. Разложим функцию e^{2xt-t^2} в ряд по степеням t и обозначим коэффициенты разложения через $\frac{\alpha_n(x)}{n!}$:

$$e^{2xt-t^2} = \alpha_0(x) + \frac{\alpha_1(x)}{1!}t + \frac{\alpha_2(x)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\alpha_n(x)}{n!}t^n + \dots \quad (2)$$

При $t = 0$ имеем $\varphi(x, 0) = 1 = \alpha_0(x)$, т. е. $\alpha_0(x) = 1$; так как $\varphi'_t(x, 0) = (2x - 2t)e^{2xt-t^2} \Big|_{t=0} = 2x$, то $\alpha_1(x) = 2x$. Функция $\varphi'_t(x, t)$ удовлетворяет тождеству $\varphi'_t(x, t) = (2x - 2t)\varphi(x, t)$. Подставляя сюда ряд (2) и приравнивая коэффициенты при t^n , имеем

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) + \alpha_2(x)t + \frac{3}{3!}\alpha_3(x)t^2 + \dots + \frac{n\alpha_n(x)}{n!}t^{n-1} + \dots = \\ = (2x - 2t) \left(\alpha_0(x) + \frac{\alpha_1(x)}{1!}t + \frac{\alpha_2(x)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\alpha_n(x)}{n!}t^n + \dots \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{n+1}{(n+1)!}\alpha_{n+1}(x) = 2x \frac{\alpha_n(x)}{n!} - 2 \frac{\alpha_{n-1}(x)}{(n-1)!},$$

т. е. $\alpha_{n+1}(x) = 2x\alpha_n(x) - 2n\alpha_{n-1}(x)$. Следовательно, функции $\alpha_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению а) из задачи 346, которому также удовлетворяют и полиномы Чебышева—Эрмита. Поскольку $\alpha_0(x) = 1 = H_0(x)$, $\alpha_1(x) = 2x = H_1(x)$, то все $\alpha_k(x)$ равны $H_k(x)$, $k = 2, 3, \dots$

Иногда за многочлены Чебышева—Эрмита принимают функции

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Выпишем несколько первых из этих полиномов:

$$\begin{aligned} h_0(x) = 1, \quad h_1(x) = x, \quad h_2(x) = x^2 - 1, \\ h_3(x) = x^3 - 3x, \quad h_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3, \dots \end{aligned}$$

Для многочленов $h_n(x)$ имеет место рекуррентная формула

$$h_{n+1}(x) = xh_n(x) - nh_{n-1}(x). \quad (3)$$

Пример 29. Докажем, что производящей функцией для функций $h_n(x)$ является функция $e^{tx - \frac{t^2}{2}}$, т. е.

$$e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Решение. Разложим функцию $\varphi(x, t) = e^{tx - \frac{t^2}{2}}$ в степенной ряд по t и обозначим через $\frac{\alpha_n(x)}{n!}$ коэффициенты этого разложения

$$e^{tx - \frac{t^2}{2}} = \alpha_0(x) + \frac{\alpha_1(x)}{1!}t + \frac{\alpha_2(x)}{2!}t^2 + \dots + \frac{\alpha_n(x)}{n!}t^n + \dots \quad (4)$$

При $t = 0$ имеем $\varphi(x, 0) = 1$, $\varphi'_t(x, 0) = x$, т. е. $\alpha_0(x) = 1$, $\alpha_1(x) = x$. Функция $\varphi(x, t)$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = (x - t)\varphi(x, t).$$

Подставляя в это тождество ряд (4) и приравнявая коэффициенты при t^n , имеем

$$\frac{\alpha_{n+1}(x)}{n!} = \frac{x\alpha_n(x)}{n!} - \frac{\alpha_{n-1}(x)}{(n-1)!},$$

откуда

$$\alpha_{n+1}(x) = x\alpha_n(x) - n\alpha_{n-1}(x).$$

Следовательно, функции $\alpha_n(x)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (3), которому удовлетворяют и полиномы Чебышева—Эрмита $h_n(x)$. Поскольку $\alpha_0(x) = 1 = h_0(x)$, $\alpha_1(x) = x = h_1(x)$, то все $\alpha_n(x)$ равны $h_n(x)$.

§11. Асимптотические оценки интегралов

Решения многих прикладных задач находятся в виде некоторых интегралов $\int_a^b f(x, \lambda) dx$, зависящих от различных параметров, и часто надо знать поведение таких интегралов при $\lambda \rightarrow +\infty$.

В этом параграфе приводятся некоторые результаты о поведении этих интегралов на бесконечности.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, и пусть на отрезке $[a; b]$ функция $g(x)$ имеет единственный минимум в точке $x_0 \in (a; b)$, причем $g''(x_0) > 0$, $g'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $g'(x) < 0$ при $x > x_0$, $f(x_0) \neq 0$.

Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\int_a^b f(x) e^{-\lambda g(x)} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(x_0)}} f(x_0) e^{-\lambda g(x_0)} \quad (1)$$

при $\lambda \rightarrow +\infty$.

При вычислении интегралов $\int_a^b f(x) e^{i\lambda g(x)} dx$ при больших значениях λ пользуются следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, и пусть на $(a; b)$ функция $g(x)$ имеет единственный экстремум в точке $x_0 \in (a; b)$, причем $g''(x_0) \neq 0$, $f(x_0) \neq 0$.

Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\int_a^b f(x) e^{i\lambda g(x)} dx \sim f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |g''(x_0)|}} \cdot e^{i(\lambda g(x_0) + \pi/4 \operatorname{sign} g''(x_0))}. \quad (2)$$

Пример 30. Найти асимптотику при $x \rightarrow +\infty$ функции

$$\text{Бесселя } J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin u} du.$$

Решение. Положим $g(u) = \sin u$, $f(u) = 1$. Тогда

$$g'(u) = \cos u, \quad g''(u) = -\sin u,$$

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = g'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad g\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1,$$

$$g''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Разобьем отрезок интегрирования $[0; 2\pi]$ на $[0; \pi]$ и $[\pi; 2\pi]$ и на каждом из них применим формулу (2). Тогда

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(e^{i(x-\pi/4)} + e^{i(-x+\pi/4)} \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

§12. Упражнения

Доказать равенства.

- 1) $\operatorname{erf}(x) = \Phi(x\sqrt{2})$. 2) $\Phi(x) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.
 3) $(\operatorname{erf}(x))' = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$. 4) $\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.
 5) $\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$. 6) $\operatorname{erf}(xy) = \frac{2y}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2 y^2} dt$.
 7) $\int \operatorname{erf}(x) dx = x \operatorname{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} + C$.
 8) $\int \Phi(x) dx = x \Phi(x) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + C$.
 9) Показать, что при $x \rightarrow +\infty$ $\operatorname{erf}(x) - 1 \sim \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x^2}$.
 10) Разложить в степенной ряд функции $y = \operatorname{erf}(x)$ и $y = \Phi(x)$.
 11) Выразить через функцию $y = \operatorname{erf}(x)$ интеграл

$$\text{а) } \int_0^x e^{-\pi t^2/4} dt; \quad \text{б) } \int_0^\alpha e^{h^2(\alpha-t)} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

- 12) Доказать, что при $x \rightarrow +\infty$ справедливо равенство

$$1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi x}} \left(1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2k-1)!}{(2x^2)^k} + r_n(x) \right),$$

$$\text{где } r_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!}{2^n} x e^{x^2} \cdot \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}} dt.$$

- 13) Показать, что функция $\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$

- а) является решением уравнения $\psi' = \psi - \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$;
 б) $\psi(x) \equiv e^x (1 - \operatorname{erf}(x))$.

14) Показать, что функция $\psi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2} \operatorname{erf}(x)$ является решением уравнения $\psi' + 2x\psi = 1$.

15) Показать, что функции $\psi(x) = e^{-x^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(x) + C \right)$, $C = \text{const}$, являются решением уравнения $\psi' + 2x\psi = 1$.

16) Доказать, что функция $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2} du$

а) является решением уравнения $F' + 2xF = 1$, $F(0) = 0$;

б) $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$, $|x| < \infty$;

в) $F(x) \sim \frac{1}{2x}$, $x \rightarrow +\infty$.

17) Получить интегральные представления для квадрата интеграла вероятности

а) $\operatorname{erf}^2(x) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$;

б) $(1 - \operatorname{erf}(x))^2 = \frac{4}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

18) Вывести формулы

а) $1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - 2xt} dt$;

б) $(1 - \operatorname{erf}(x))^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-2x^2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - 2xt\sqrt{2}} \operatorname{erf}(t) dt$.

Доказать равенства.

19) $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$, 20) $C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^2} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$.

21) $C(x) + iS(x) = \sqrt{\frac{i}{2}} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{i}} \right)$.

$$22) C(x) - iS(x) = \frac{1}{\sqrt{2}i} \operatorname{erf}(x\sqrt{i}).$$

23) Найти разложение функций $S(x)$ и $C(x)$ в степенной ряд.

24) Доказать, что при $x \rightarrow +\infty$ справедливы следующие соотношения:

$$S(x) - \frac{1}{2} \sim -\frac{\cos x^2}{\sqrt{2\pi x}}; \quad C(x) - \frac{1}{2} \sim \frac{\sin x^2}{\sqrt{2\pi x}}.$$

25) Выразить функцию

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y^2 + \cos y^2}{y^4} dy$$

через интегралы Френеля.

26) Вывести разложения интегралов Френеля

$$S_1(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad C_1(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi t^2}{2} dt,$$

$$S_1(x) = x \left[\alpha(x) \sin \frac{\pi x^2}{2} - \beta(x) \cos \frac{\pi x^2}{2} \right],$$

$$C_1(x) = x \left[\alpha(x) \cos \frac{\pi x^2}{2} + \beta(x) \sin \frac{\pi x^2}{2} \right],$$

где

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi x^2)^{2k}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4k+1)}, \quad \beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi x^2)^{2k+1}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (4k+3)}.$$

$$27) \text{ Пусть } C_1(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi t^2}{2} dt \text{ и } S_1(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi t^2}{2} dt.$$

Доказать равенства:

$$a) C_1^2(x) + S_1^2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \left[\frac{\pi x^2}{2} (1-t^2) \right]}{1-t^2} dt;$$

$$б) C_1^2(x) - S_1^2(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin \left[\frac{\pi x^2}{2} (1+t^2) \right]}{1+t^2} dt.$$

Доказать равенства.

$$28) \operatorname{Ei}(\ln x) = \operatorname{Li}(x), \quad x < 1. \quad 29) \operatorname{Li}(e^x) = \operatorname{Ei}(x), \quad x < 0.$$

$$30) \frac{d}{dx}(-\operatorname{Ei}(-x)) = -\frac{e^{-x}}{x}, \quad x > 0.$$

$$31) \int_0^x \operatorname{Ei}(-\alpha t) dt = x \operatorname{Ei}(-\alpha x) - \frac{1 - e^{-\alpha x}}{\alpha}.$$

Получить следующие разложения.

$$32) \operatorname{Ei}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} + \ln(-x) + C_{\mathfrak{D}}, \quad x < 0.$$

$$33) \operatorname{Li}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{k \cdot k!} + \ln |\ln x| + C_{\mathfrak{D}}, \quad x > 0.$$

$$34) \operatorname{Si}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!}.$$

$$35) \operatorname{Ci}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k(2k)!} + \ln x + C_{\mathfrak{D}}, \quad x > 0.$$

Доказать следующие соотношения.

$$36) \operatorname{Li}(x) \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \rightarrow 0.$$

$$37) \operatorname{Si}(x) \sim x, \quad x \rightarrow 0.$$

$$38) \operatorname{Si}(x) \sim -\frac{\cos x}{x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

$$39) \operatorname{Ci}(x) \sim \frac{\sin x}{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$40) \operatorname{Ei}(-x) \sim -\frac{e^{-x}}{x}, \quad x \rightarrow -\infty.$$

$$41) \operatorname{Ei}(-1) = C_{\mathfrak{D}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k(k!)}.$$

42) Получить интегральное представление

$$-\operatorname{Ei}(-x) = e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt.$$

43) Получить интегральное представление для квадрата интегральной показательной функции

$$[\text{Ei}(-x)]^2 = 2e^{-2x} \int_0^{+\infty} e^{-2xt} \frac{\ln(1+2t)}{1+t} dt.$$

44) Получить интегральное представление

$$\text{a) } \text{Ci}(x) = C_{\text{Э}} + \ln x - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt;$$

$$\text{б) } \text{Ei}(x) = C_{\text{Э}} + \ln x + \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

45) Применяя правило Лопиталя, показать, что

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \text{Ei}(-x) = 0; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} \text{Ei}(-x) = 1$$

и получить отсюда соотношение

$$\text{Ei}(-x) \sim -\frac{e^x}{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

46) Доказать, что $\int e^u f(u) du$, где $f(u)$ — произвольная рациональная функция, представляется в конечном виде через функцию $\text{Ei}(x)$ и элементарные функции.

Доказать соотношения

$$47) \text{Ei}(x) = \frac{e^x}{x} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k!}{x^k} + (n+1)! x e^{-x} \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t^{n+2}} dt \right).$$

$$48) \text{Li}(x) = \frac{x}{\ln x} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln x)^k} + r_n(x) \right),$$

$$|r_n(x)| = O(|\ln x|^{-n-1}), \quad x \rightarrow 0+.$$

$$49) \text{Ei}(xi) = \text{Ci}(x) - i \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) \right], \quad x > 0.$$

$$50) \text{Ei}(-xi) = \text{Ci}(x) + i \left[\frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) \right], \quad x > 0.$$

$$51) \text{Ci}(x) = \frac{1}{2} \left[\text{Ei}(-x e^{\frac{i\pi}{2}}) + \text{Ei}(-x e^{-i\frac{\pi}{2}}) \right].$$

$$52) \operatorname{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i} \left[\operatorname{Ei}(-xe^{\frac{i\pi}{2}}) - \operatorname{Ei}(-xe^{-\frac{i\pi}{2}}) \right].$$

$$53) \text{ а) } \operatorname{Ci}(x) = \frac{\sin x}{x} P(x) - \frac{\cos x}{x} Q(x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$\text{ б) } \frac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(x) = \frac{\cos x}{x} P(x) + \frac{\sin x}{x} Q(x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$\text{ где } P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k)!}{x^{2k}} + O(x^{-2n-2}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2k+1)!}{x^{2k+1}} + O(x^{-2n-3}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Выразить через интегральные функции следующие интегралы.

$$54) \int \frac{\sin 5x}{x} dx.$$

$$55) \int \frac{\cos^2 mx}{x} dx.$$

$$56) \int \frac{e^{mx}}{x^2} dx.$$

$$57) \int \frac{e^x}{x-a} dx.$$

$$58) \int \frac{\sin x}{x-a} dx.$$

$$59) \int \frac{\cos x}{x-a} dx.$$

$$60) \int \frac{e^{5x}}{(x+2)^2} dx.$$

$$61) \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$$

$$62) \int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

$$63) \int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx.$$

$$64) \int \frac{e^{3x} + 2e^{2x} + 4}{x^3 + x^2 - x - 1} dx.$$

$$65) \int \frac{2x-1}{\ln x} dx.$$

$$66) \int \frac{x^2 - x + 2}{\ln x} dx.$$

$$67) \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t^2(t-1)} dt, \quad x < 0.$$

$$68) \int \sin 3x \operatorname{Ci} 2x dx.$$

$$69) \int \cos 3x \operatorname{Si} 2x dx.$$

$$70) \int \sin 4x \operatorname{Si} 5x dx.$$

$$71) \int \cos 2x \operatorname{Ci} x dx.$$

$$72) \int \operatorname{Ci} 2x \operatorname{Si} 2x dx.$$

$$73) \int \operatorname{Si} 2x \operatorname{Si} 4x dx.$$

Вычислить.

$$74) \int_0^{+\infty} \cos \gamma x \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right) dx. \quad 75) \int_0^{+\infty} \sin \gamma x \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx.$$

$$76) \int_0^{+\infty} \cos \gamma x \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right) dx. \quad 77) \int_0^{+\infty} \sin \gamma x \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right) dx.$$

$$78) \int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right) dx.$$

$$79) \int_0^{+\infty} dx \left\{ \int_{\alpha x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right\}.$$

$$80) \int_0^{+\infty} dx \left\{ \int_{\alpha x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right\}.$$

$$81) \int_0^{+\infty} dx \left\{ \int_{\alpha x}^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \right\}.$$

$$82) \int_0^{+\infty} dx \left\{ \int_{\alpha x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \cdot \int_{\beta x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right\}.$$

Привести к эллиптическим интегралам следующие интегралы.

$$83) \int \frac{t^4 dt}{\sqrt{(t^2-1)(t^2-4)}}. \quad 84) \int \frac{t^6 dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

$$85) \int \frac{t^4 - 2t^2}{\sqrt{t^4-1}} dt.$$

$$86) \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-1)(x-2)}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$87) \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-1)(x-2)}}, \quad x > 2.$$

$$88) \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}}.$$

Привести к эллиптическим интегралам в форме Лежандра следующие интегралы.

$$89) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}} \quad (0 < b < a, x > 0).$$

$$90) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(b^2 - x^2)(a^2 + x^2)}} \quad (0 < x < b).$$

$$91) \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \quad (0 < b < a < x).$$

$$92) \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} \quad (0 < x < b < a).$$

$$93) \int_b^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - b^2)(a^2 - x^2)}} \quad (0 < b < x < a).$$

$$94) \int_b^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 - b^2)}} \quad (0 < b < x, a > 0).$$

$$95) \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} \quad (0 < x < b < a).$$

$$96) \int_b^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(x^2 - b^2)}} \quad (0 < b < x < a).$$

$$97) \int_a^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)}} \quad (0 < b < a < x).$$

$$98) \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}} \quad (x > 0, 0 < b < a).$$

$$99) \int_0^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 - x^2)}} \quad (0 < x < b).$$

$$100) \int_b^x \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)(x^2 - b^2)}} \quad (0 < b < x, 0 < a).$$

$$101) \int_0^x \frac{x^4 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)}} \quad (0 < x < b < a).$$

$$102) \int_0^x \sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - x^2)} dx \quad (0 < x < b < a).$$

$$103) \int_0^x \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{x^2 - b^2}} dx \quad (0 < b < x, a > 0).$$

$$104) \int_0^x \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{b^2 + x^2}} dx \quad (x > 0, 0 < b < a).$$

$$105) \int_0^x \frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (0 < x < b < a).$$

$$106) \int_0^x \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - x^2}} dx \quad (0 < x < b < a).$$

$$107) \int_0^\varphi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}. \quad 108) \int_0^\varphi \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

$$109) \int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi. \quad 110) \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

$$111) \int_0^\varphi \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi} d\varphi. \quad 112) \int_0^\varphi \operatorname{tg}^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Свести вычисление следующих интегралов к вычислению значений эллиптических интегралов в форме Лежандра.

$$113) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$114) \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$115) \int_0^{t_0} \frac{dx}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}.$$

$$116) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$117) \int_1^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^4-1}}.$$

$$118) \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^4+3x^2+2}}.$$

$$119) \int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^4-16}}.$$

$$120) \int_1^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2-1)(4-x^2)}}.$$

$$121) \int_0^1 \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$122) \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3+x^2}{2+x^2}} dx.$$

$$123) \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{4x^2-1}} dx.$$

$$124) \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{4-\sin^2 \varphi}}.$$

$$125) \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{3-\sin^2 \varphi}}.$$

$$126) \int_0^{\pi/6} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\sqrt{2-\sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

$$127) \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 \varphi \sqrt{9-\sin^2 \varphi} d\varphi.$$

$$128) \int_0^1 -\frac{x^4}{\sqrt{3-x^2} \sqrt{2-x^2}} dx.$$

$$129) \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}.$$

$$130) \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2 \varphi - 1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

$$131) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+3x^2+2}}.$$

$$132) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+3x^2+2}}.$$

$$133) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x^2 - 2}}.$$

$$134) \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4}}.$$

$$135) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}.$$

$$136) \int_{-2}^{-1,5} \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)(x+2)}}.$$

137) Написать разложение в степенной ряд по k функций $E(k, \varphi)$ и $F(k, \varphi)$.

138) Проверить, что

$$\begin{aligned} \text{а) } F(k, \varphi) &= \frac{2\varphi}{\pi} K(k) - \sin \varphi \cos \varphi \times \\ &\times \left(\frac{1}{2} a_2 k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} a_4 k^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} a_6 k^6 + \dots \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } E(k, \varphi) &= \frac{2\varphi}{\pi} E(k) + \sin \varphi \cos \varphi \times \\ &\times \left(\frac{1}{2} a_2 k^2 + \frac{1}{2 \cdot 4} a_4 k^4 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} a_6 k^6 + \dots \right); \end{aligned}$$

где

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{3}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4} \sin^2 \varphi, \quad a_6 = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{5}{4 \cdot 6} \sin^2 \varphi + \frac{1}{6} \sin^4 \varphi,$$

$$a_8 = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 6 \cdot 8} \sin^2 \varphi + \frac{7}{6 \cdot 8} \sin^4 \varphi + \frac{1}{8} \sin^6 \varphi, \dots$$

и $K(k)$, $E(k)$ находятся из формул (10) и (11) или таблиц.

139) Показать, что

$$K(k) = \frac{\pi}{2} (1+m) \cdot \left\{ 1 + \frac{1^2}{2^2} m^2 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} m^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} m^6 + \dots \right\},$$

где $m = \frac{1-k'}{1+k'}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$. Заметим, что этот ряд сходится быстрее, чем соответствующий ряд (10) гл. III § 4, поскольку $m^2 < k^2$.

140) Показать, что

$$E(k) = \frac{\pi}{2(1+m)} \left\{ 1 + \frac{m^2}{2^2} + \frac{1^2}{2^2 \cdot 4^2} m^4 + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} m^6 + \dots \right\},$$

где $m = \frac{1-k'}{1+k'}$, $k' = \sqrt{1-k^2}$. Заметим, что этот ряд сходится быстрее, чем соответствующий ряд (11) гл. III § 4, поскольку $m^2 < k^2$.

141) Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, то

$$\text{а) } G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \theta + b_1^2 \sin^2 \theta}},$$

где $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = \sqrt{ab}$;

$$\text{б) } G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

где $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot b_{n-1}}$, $n = 2, 3, \dots$;

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \mu(a, b);$$

$$\text{г) } \mu(a, b) = \frac{\pi}{2G}.$$

142) Используя равенство г) задачи 141 и калькулятор, вычислить приближенно значение

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}.$$

143) Найти длину дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) от точки $A(a, 0)$ до точки $M(x, y)$, лежащей в первой четверти.

144) Найти длину лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$.

145) Показать, что вычисление дуги гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ приводит к вычислению эллиптических интегралов.

146) Показать, что длина кривой $r = a \cos \theta + b$ ($a > 0$, $b > 0$)

$$\text{равна } 4(a+b)E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right).$$

147) Найти длину кривой (кривая Вивиани)

$$x = R \sin^2 t, \quad y = R \sin t \cos t, \quad z = R \cos t.$$

148) Найти объем тела, ограниченного двумя цилиндрами, один — радиуса r , а другой — радиуса R ($r < R$), оси которых пересекаются под прямым углом:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y^2 + z^2 = R^2.$$

149) Найти площадь поверхности тела, ограниченного двумя цилиндрами из предыдущей задачи.

150) Используя разложение эллиптического интеграла $E(k)$ в степенной ряд, вычислить

$$\int_0^{\pi/2} \frac{E(h \sin \theta) \sin \theta}{1 - h^2 \sin^2 \theta} d\theta, \quad 0 < h < 1.$$

151) Доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{dK}{dk} &= \frac{E}{k(1-k^2)} - \frac{K}{k}; \\ \text{б) } \frac{dE}{dk} &= \frac{E-K}{k}. \end{aligned}$$

152) Доказать, что

$$\text{а) } \int_0^1 K(k) dk = \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi}{\sin \varphi} d\varphi = 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx;$$

б) вычислить с точностью до 10^{-2} постоянную Каталана $G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$, используя разложение в ряд функции $y = \operatorname{arctg} x$.

153) Доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right); \\ \text{б) } 2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2\sqrt{2}} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right); \\ \text{в) } EK' + E'K - KK' &= \frac{\pi}{2}, \text{ где } K' = K(k'), E' = E(k'), \\ k' &= \sqrt{1-k^2}. \end{aligned}$$

Используя значения интегралов Эйлера, вычислить следующие интегралы.

$$154) \int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx.$$

$$155) \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^3} dx.$$

$$156) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}.$$

$$157) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx.$$

$$158) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^3}.$$

$$159) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}.$$

$$160) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$$

$$161) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^3)^2}.$$

$$162) \int_0^1 (1-x^2)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$163) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2.$$

$$164) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

$$165) \int_0^a x^{2n} \sqrt{a^2-x^2} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$166) \int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$167) \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x dx.$$

$$168) \int_0^{\pi/2} \sin^{3/2} x \cos^{1/2} x dx.$$

$$169) \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}.$$

$$170) \int_0^{+\infty} t^b e^{-\alpha t} dt.$$

$$171) \int_0^{+\infty} t^b e^{-\alpha t^2} dt.$$

$$172) \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{1+x^3} dx.$$

$$173) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{1+x^4} dx.$$

$$174) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \ln \cos x \, dx, \quad n > -1.$$

$$175) \int_0^{\pi/2} \sin^n x \ln \sin x \, dx, \quad n > -1.$$

$$176) \int_0^1 \ln \Gamma(x) \sin \pi x \, dx.$$

$$177) \int_0^1 \ln \Gamma(x) \cos 2n\pi x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определить область существования и выразить через интегралы Эйлера следующие интегралы.

$$178) \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} \, dx, \quad n > 0. \quad 179) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \, dx.$$

$$180) \int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(1+x)^n} \, dx.$$

$$181) \int_0^{+\infty} \frac{x^m \, dx}{(a+bx^n)^p}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad n > 0.$$

$$182) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^\alpha}}.$$

$$183) \int_0^1 x^{p-1} (1-x^m)^{q-1} \, dx, \quad m > 0.$$

$$184) \int_0^1 \frac{x^{p-1} (1-x)^{q-1}}{[\alpha x + \beta(1-x) + \gamma]^{p+q}} \, dx, \quad \alpha \geq 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0.$$

$$185) \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^m)^n}; \quad m > 0.$$

$$186) \int_a^b \frac{(x-a)^m(b-x)^n}{(x+c)^{m+n+2}} dx, \quad 0 \leq a < b, \quad c > 0.$$

$$187) \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^{2m-1}(1-x)^{2n-1}}{(1+x^2)^{m+n}} dx.$$

$$188) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^m} dx.$$

$$189) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{x^m} dx. \quad 190) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+ax)}{x^m} dx, \quad a > 0.$$

$$191) \text{ а) } \int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x \, dx, \quad \text{ б) } \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha-1} x \, dx.$$

$$192) \int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^{\alpha} x \, dx.$$

$$193) \int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x}{(1+k \cos x)^n} dx, \quad 0 < |k| < 1.$$

$$194) \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)^{\cos 2\alpha} dx.$$

$$195) \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin x}{1+k \cos x} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{dx}{1+k \cos x}, \quad 0 < k < 1.$$

$$196) \int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx. \quad 197) \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx.$$

$$198) \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx. \quad 199) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{1+x^2} dx.$$

$$200) \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} \ln^2 x}{1+x} dx. \quad 201) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln^2 x}{1+x^2} dx.$$

$$202) \text{ Проверив, что } \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx, \quad 0 < p < 1, \text{ равен}$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (B(p, \varepsilon) - B(1-p, \varepsilon))$, вычислить этот интеграл.

$$203) \text{ Используя равенство } B(x, 1-x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\text{проверить, что } I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} - x^{q-1}}{(1+x) \ln x} dx \text{ равен}$$

$$\int_{1/2}^p B(x, 1-x) dx - \int_{1/2}^q B(x, 1-x) dx \quad (0 < p < 1, 0 < q < 1).$$

Найти величину интеграла I .

Вычислить.

$$204) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x} dx, \quad 0 < \alpha < \beta. \quad 205) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \mu x}{\operatorname{ch} \nu x} dx, \quad 0 < \mu < \nu.$$

Доказать.

$$206) \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx = 1.$$

$$207) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \right) = -\Gamma'(1).$$

Проверить равенства.

$$208) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$209) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin 2x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

$$210) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^{2n}}} = \frac{\pi}{2n}.$$

$$211) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1-x^n}} dx = \frac{2\pi}{n(n-2)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad n > 2.$$

$$212) \int_0^1 \sqrt{1-x^n} dx \cdot \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^n} dx = \\ = \frac{2\pi n}{(3n-2)(n^2-4)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}, \quad n > 2.$$

$$213) \int_0^{\pi/2} \sin^p x dx \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x} = \frac{\pi}{2p} \operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}, \quad 0 < p < 1.$$

$$214) \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \cdot \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

$$215) \int_0^{+\infty} x e^{-x^3} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

$$216) \int_0^{+\infty} e^{-x^n} x^{m-1} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x^n} x^{n-m-1} dx = \\ = \frac{\pi}{n^2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi m}{n}}, \quad n > 0, \quad 0 < m < n.$$

$$217) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch} x}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{ch}^3 x}} = \pi.$$

$$218) \prod_{m=1}^n \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \left(\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

$$219) \int_{-\infty}^1 (1-x^3)^{-1/2} dx = \sqrt{3} \int_1^{+\infty} (x^3-1)^{-1/2} dx.$$

$$220) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{p-3/2}}{(x^2+ax+b)^p} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}(a+2\sqrt{b})^{p-1/2}} \cdot \frac{\Gamma(p-1/2)}{\Gamma(p)},$$

$$b > 0, a+2\sqrt{b} > 0, p > 1/2.$$

Используя равенство $\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{+\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt$, $x > 0$, и возможность перестановки интегралов, вычислить интегралы.

$$221) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^m} dx, \quad 0 < m < 2. \quad 222) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^m} dx, \quad 0 < m < 1.$$

Обосновав возможность дифференцирования по параметру интеграла задачи 221, вычислить интегралы.

$$223) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ln x dx. \quad 224) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \ln^2 x dx.$$

225) Используя соотношение $\Gamma'(1) = -C_{\text{Э}}$, $C_{\text{Э}}$ — константа Эйлера, и дифференцируя по x формулу $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$,

вычислить интегралы:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx; & \text{б)} \int_0^1 \ln(-\ln x) dx; \\ \text{в)} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \ln t dt; & \text{г)} \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln^2 x dx; \\ \text{д)} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \ln^2 t dt. & \end{array}$$

226) Используя формулу Лобачевского (см. задачу 39 § 5 гл. I),

вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^p x}{x} dx$, где p есть рациональная дробь с нечетным числителем и знаменателем.

227) Используя формулу Гаусса (гл. III формула 16), вычи-

слить интеграл $\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{1-x} dx$, $p+1 > 0$, $q+1 > 0$.

228) Используя результат задачи 227, вычислить следующие интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 \frac{(1-x^\alpha)(1-x^\beta)}{(1-x)\ln x} dx, \alpha+1 > 0, \beta+1 > 0, \alpha+\beta+1 > 0;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^\alpha(1-x^\beta)(1-x^\gamma)}{(1-x)\ln x} dx, \alpha > -1, \alpha+\beta > -1, \alpha+\gamma > -1, \\ \alpha+\beta+\gamma > -1;$$

$$\text{в) } \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{\beta-1}}{(1+x)\ln x} dx, \alpha > 0, \beta > 0;$$

$$\text{г) } \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - x^{-\alpha}}{(1+x)\ln x} dx, 0 < \alpha < 1.$$

$$229) \text{ Используя формулу } \int_0^{\pi/2} \sin^{2\alpha-1} \varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1/2)},$$

$$\alpha > 0, \text{ вычислить интеграл } \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \varphi \ln \sin \varphi d\varphi.$$

230) Найти площадь области, ограниченной кривой

$$(x^2 + y^2)^4 = xy^3.$$

231) Найти площадь области, ограниченной одной петлей кривой $r^m = a^m \cos m\varphi$, $m \in \mathbb{N}$, и длину этой петли.

232) Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^n + y^n + z^n = a^n$, $n > 0$, и координатными плоскостями, находящегося в первом октанте $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

233) Исходя из определения функции $\Gamma(x)$ для $x < 0$, $x \neq -n$, $n \in \mathbb{N}$ (гл. III § 5), проверить равенства

$$\text{а) } \Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x \sin \pi x}, \quad x \in (0; 1);$$

$$\text{б) } \Gamma(1+x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}, \quad 0 < |x| < 1;$$

$$\text{в) } \Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x}, \quad |x| < \frac{1}{2};$$

$$\text{г) } \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi};$$

$$\text{д) } \Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Исследовать сходимость интеграла.

$$234) \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\Gamma(2x+1)}.$$

$$235) \int_1^{+\infty} \frac{\Gamma(2x) dx}{3^x \Gamma(2x+1)\Gamma(x)}.$$

$$236) \int_1^{+\infty} \frac{\Gamma(2x+1)}{\Gamma^2(x+1)} dx.$$

$$237) \int_1^{+\infty} \frac{16^x \Gamma^3(x+1)}{\Gamma(3x+1)} dx.$$

$$238) \int_1^{+\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{x^x} dx.$$

Найти предел.

$$239) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(x+1)}.$$

$$240) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha B(\alpha, x), \quad \alpha > 0.$$

241) Проверить, что функции $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}$ и $J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k!\Gamma(k-\nu+1)}$ являются решениями уравнения

Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Определить область сходимости рядов для $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$. Исследовать эти ряды на абсолютную сходимость

242) Показать, что функция $J_\nu(\alpha x)$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 y'' + xy' + (\alpha^2 x^2 - \nu^2)y = 0.$$

243) Доказать, что

$$J_0(0) = 1, \quad J_n(0) = 0, \quad J'_0(0) = J'_n(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 1, \quad J'_1(0) = \frac{1}{2}.$$

244) Показать, что при $n \in \mathbb{N}$ функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ линейно зависимы, причем $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$.

245) Доказать, что при любом ν справедливы рекуррентные формулы

$$а) \quad \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^\nu} J_\nu(x) \right) = -\frac{1}{x^{\nu+1}} J_{\nu+1}(x);$$

$$б) \quad \frac{d}{dx} (x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x).$$

В частности, проверить, что

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad (xJ_1(x))' = xJ_0(x),$$

$$\text{то есть, что } xJ_1(x) = \int_0^x \xi J_0(\xi) d\xi, \quad \int_0^x J_1(\xi) d\xi = 1 - J_0(x).$$

246) Используя результат задачи 245, доказать рекуррентные формулы

$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x).$$

Найти выражение функций $J_2(x)$, $J_3(x)$ и $J_4(x)$ через функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

247) Показать, что

$$J_2(x) = J''_0(x) - \frac{1}{x} J'_0(x), \quad J_2(x) - J_0(x) = 2J''_0(x).$$

248) Проверить, что функция Бесселя $J_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\text{представляется в виде } J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi.$$

249) Показать, что функция $y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin \varphi - \nu \varphi)} d\varphi$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = \frac{\sin \pi \nu}{\pi} (x - \nu).$$

250) Доказать, что для произвольного ν имеем

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi - \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{sh} y - \nu y} dy.$$

251) Доказать, что $|J_n(x)| \leq 1$ при $n = 0, 1, 2, \dots$

252) Доказать, что

$$a) \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m \left[\frac{1}{x^\nu} J_\nu(x) \right] = (-1)^m \frac{1}{x^{m+\nu}} J_{m+\nu}(x);$$

$$б) \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m [x^\nu J_\nu(x)] = x^{\nu-m} J_{\nu-m}(x),$$

$$\text{где } \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \dots \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} (f(x)) \right) \dots \right).$$

253) Доказать формулу Пуассона

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \cos xt \, dt,$$

или, полагая $t = \cos \theta$,

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(x \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta \, d\theta.$$

254) Показать, что при $x \rightarrow 0$ справедлива формула

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + O(x^4), \quad J_0(0) = 1.$$

255) Показать, что при $x \rightarrow 0$ справедливы формулы

$$J_\nu(x) \sim \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad J_{-\nu}(x) \sim \frac{2^\nu}{x^\nu \Gamma(1 - \nu)}.$$

256) Доказать, что любая функция Бесселя при больших x представима в виде $J_\nu(x) = \gamma \frac{\sin(x + \delta)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$, где γ и δ — некоторые постоянные.

257) Выписать ряд, определяющий функцию $J_{-1/2}(x)$, и доказать, что $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$.

258) Выразить функции $J_{3/2}$, $J_{-3/2}$, $J_{5/2}$, $J_{-5/2}$ через элементарные функции.

259) Проверить, что функции $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ и $\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Бесселя при $\nu = 1/2$, т. е. уравнению $y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)y = 0$.

260) Доказать рекуррентную формулу

$$J_{n+1/2}(x) = (-1)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} x^{n+1/2} \left(\frac{d}{x dx}\right)^n \frac{\sin x}{x}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

(Обозначение $\left(\frac{d}{x dx}\right)$ см. в задаче 252.)

261) Показать, используя формулу $J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu J_\nu}{x}$, что

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) P_n\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) \right\},$$

где $P_n(u)$ — многочлен степени n , а $Q_{n-1}(u)$ — многочлен степени $n-1$, $P_n(0) = 1$, $Q_{n-1}(0) = 0$.

262) Доказать, что при $x \rightarrow +\infty$ справедлива формула

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi n}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

263) Доказать, что

$$a) \int J_{\nu-1}(x) x^\nu dx = x^\nu J_\nu(x) + C;$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \int J_\nu(x) x^{1-\nu} dx = -x^{1-\nu} J_{\nu-1}(x) + C; \\ \text{в)} \quad & \int J_{\nu+2}(x) dx = \int J_\nu(x) dx - 2J_{\nu+1}(x); \\ \text{г)} \quad & \int_0^x J_\nu(\xi) d\xi = 2[J_{\nu+1}(x) + J_{\nu+3}(x) + J_{\nu+5}(x) + \dots]. \end{aligned}$$

264) Доказать, что

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \int_0^x x \cdot J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) dx = \\ & = \frac{x}{\alpha^2 - \beta^2} (\alpha J_\nu(\beta x) \cdot J_{\nu+1}(\alpha x) - \beta J_\nu(\alpha x) J_{\nu+1}(\beta x)); \\ \text{б)} \quad & \int_0^x x J_\nu^2(\alpha x) dx = \frac{x^2}{2} \left((J'_\nu(\alpha x))^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 x^2}\right) J_\nu^2(\alpha x) \right). \end{aligned}$$

265) Доказать, что если α и β — корни функции $J_\nu(x)$, то

$$\int_0^1 x J_\nu(\alpha x) J_\nu(\beta x) dx = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ \frac{1}{2} (J'_\nu(\alpha))^2, & \alpha = \beta, \end{cases} \quad \nu > -1.$$

266) Доказать, что если α — корень уравнения $J'_1(x) = 0$, то

$$\int_0^1 t J_1^2(\alpha t) dt = \frac{1}{2} [J_1^2(\alpha) - J_0^2(\alpha)].$$

267) Доказать, что
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2} J_\nu(\beta x) x^{\nu+1} dx = \frac{\beta^\nu}{(2\alpha^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

268) Доказать формулы

$$C^*(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} J_{1/2}(\xi) d\xi, \quad S^*(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} J_{-1/2}(\xi) d\xi,$$

где $C^*(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos t^2 dt$, $S^*(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin t^2 dt$ — интегралы Френеля.

269) Проверить равенства

$$\text{а) } \int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x);$$

$$\text{б) } \int_0^x x^4 J_0(x) dx = x^4 J_1 - 3x^3 J_2 + 3x^2 J_3 + 3x J_4 + 6 \sum_{k=2}^{\infty} J_{2k+1}$$

$$\text{в) } \int_0^x x^7 J_2(x) dx = x^7 J_3 - 4x^6 J_4 + 8x^5 J_5;$$

$$\text{г) } \int_0^x x J_1(x) dx = x J_0(x);$$

$$\text{д) } \int_0^x x^5 J_2(x) dx = x^5 J_3(x) - 2x^4 J_4(x).$$

270) Доказать, что при любом n справедлива формула

$$J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) J_{n-k}(y).$$

271) Доказать формулы

$$\begin{aligned} \text{а) } e^{ix \sin \varphi} &= J_0(x) + 2i \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \sin(2k-1)\varphi + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos 2k\varphi; \end{aligned}$$

$$\text{б) } e^{ix \cos \varphi} = J_0(x) + 2i \cos \varphi J_1(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(x) \cos k\varphi.$$

272) Доказать справедливость разложений

$$\text{а) } \cos(x \sin \varphi) = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos 2k\varphi;$$

$$\text{б) } \sin(x \sin \varphi) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(x) \sin(2k-1)\varphi;$$

$$\text{в) } \cos(x \cos \varphi) = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) \cos 2k\varphi;$$

$$\text{г) } \sin(x \cos \varphi) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k-1}(x) \cos(2k-1)\varphi.$$

273) Доказать, что функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ разлагаются в ряды

$$\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \dots,$$

$$\sin x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - \dots.$$

274) Доказать, что функции $y = e^{x \cos \varphi}$ и $y = e^{x \sin \varphi}$ разлагаются в ряды

$$e^{x \cos \varphi} = I_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(x) \cos k\varphi,$$

$$e^{x \sin \varphi} = I_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} I_k(x) \cos \left(\frac{\pi k}{2} - k\varphi \right),$$

где $I_\nu(ix) = e^{\frac{\pi\nu}{2}i} J_\nu(x)$, $I_\nu(-ix) = e^{-\frac{\pi\nu}{2}i} J_\nu(x)$.

275) Доказать интегральную формулу

$$\begin{aligned} J_n^2(x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{2n}(2x \cos \varphi) d\varphi = \\ &= (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_0(2x \cos \varphi) \cos 2n\varphi d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

276) Доказать формулу

$$J_\mu(x) J_\nu(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{\mu+\nu}(2x \cos \varphi) \cos(\mu - \nu)\varphi d\varphi.$$

277) Доказать формулу $\int_0^x J_\nu(\xi) d\xi = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{\nu+2k+1}(x)$, $\nu > -1$.

278) Доказать формулу

$$\int_0^x t^\mu J_\nu(t) dt = x^\mu J_{\nu+1}(x) - (\mu - \nu - 1) \int_0^x t^{\mu-1} J_{\nu+1}(t) dt,$$

$$\mu + \nu > -1.$$

279) Показать, что вычисление интегралов $\int_0^x t^m J_\nu(t) dt$, $\nu > -1$, $m = 0, 1, 2, \dots$, приводится к вычислению интеграла $\int_0^x J_{\nu+m}(t) dt$.

280) Показать, что функция $J_0(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+y)}{x+y} J_0(y) dy, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

281) Доказать, что функция $\varphi(x, t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2}$ удовлетворяет уравнению $t \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (x - t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$.

282) Доказать, что полиномы Лежандра удовлетворяют уравнению $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$.

283) Показать, что $|P_n(x)| \leq 1$, $|x| \leq 1$.

284) Показать, что многочлены Лежандра удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\text{а) } (n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x);$$

$$\text{б) } xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x);$$

$$\text{в) } P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x);$$

$$\text{г) } P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x);$$

$$\text{д) } (1-x^2)P'_n(x) = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x));$$

$$\text{е) } ((1-x^2)P'_n(x))' + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

285) Показать, что

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n,$$

$$P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad P_{2n+1}(0) = 0.$$

286) Показать, что многочлен $P_{2k}(x)$ — четная функция, а многочлен $P_{2k+1}(x)$ — нечетная функция.

287) Доказать, что если A_n — старший коэффициент в $P_n(x)$, то $A_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} A_n$.

Зная, что $A_0 = 1$, получить A_n .

288) Доказать, что для многочленов Лежандра имеет место формула Лапласа

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta)^n d\theta.$$

289) Доказать, что для многочленов Лежандра справедливы неравенства

$$|P_n(x)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}}, \quad |x| < 1.$$

290) Получить интегральное представление полиномов Лежандра

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos(n + \frac{1}{2}) \varphi}{\sqrt{2 \cos \varphi - 2 \cos \theta}} d\varphi,$$

$$0 < \theta < \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

используя интеграл Лапласа (см. задачу 288).

291) Доказать, что многочлен Лежандра $P_n(x)$ ортогонален на отрезке $[-1; 1]$ любому многочлену $Q_m(x)$ меньшей степени ($m < n$).

292) Доказать формулу

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^{+1} P_{n-1}^2(x) dx, \quad n = 2, 3, \dots$$

Получить отсюда, что $\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$

293) Показать, что многочлен Лежандра имеет n различных корней на $(-1; 1)$.

294) Доказать, что для любого многочлена $Q_n(x)$ справедливо равенство

$$Q_n(x) = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + \dots + C_n P_n(x)$$

где $P_i(x)$ — многочлены Лежандра.

295) Вычислить следующие интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 (1-x^2)(P'_n(x))^2 dx, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\text{б) } \int_0^1 (t P_n(t))^2 dt, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\text{в) } \int_0^1 P_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

296) Выразить через многочлены Лежандра следующие функции:

а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y = x^3$;

$$\text{г) } y = x^4; \quad \text{д) } y = |x|; \quad \text{е) } y = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$\text{ж) } y = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ -1, & -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

297) Найти наилучшее среднеквадратичное приближение функции $y = \sin x$, $x \in [-\pi; \pi]$, многочленами Лежандра степени не выше третьей.

298) Проверить справедливость равенства

$$\int_x^1 P_n(t) dt = \frac{2}{2n+1} [P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

299) Доказать, что для любой функции $f(x)$, кусочно-гладкой на любом отрезке $[a; b] \subset (-1; 1)$ и такой, что $\int_{-1}^{+1} f^2(x) dx$

сходится, существует $\int_{-1}^{+1} f(x) P_n(x) dx$.

300) Используя надлежащую замену в дифференциальном уравнении, определяющем полиномы Лежандра, привести его к виду

$$а) \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + n(n+1)u = 0;$$

$$б) \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left[\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \right] u = 0$$

и найти выражение решений этих уравнений через полиномы Лежандра.

301) Доказать асимптотическую формулу для многочленов Лежандра:

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right] + O \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right),$$

$$n \rightarrow +\infty, \quad \delta \leq \theta \leq \pi - \delta, \quad \delta > 0.$$

302) Доказать, что

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0, \\ \pi, & m = n = 0, \end{cases}$$

т. е. многочлены Чебышева ортогональны на $[-1; 1]$ с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

303) Показать, что многочлены Чебышева удовлетворяют уравнению $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.

304) Доказать, что многочлены Чебышева удовлетворяют рекуррентному соотношению $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$.

305) Вычислить значение многочлена Чебышева

$$а) T_n(1); \quad б) T_n(-1); \quad в) T_{2n}(0); \quad г) T_{2n+1}(0).$$

306) Показать, что при $|t| < 1$ справедливо равенство

$$\ln \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2tx + 1}} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) \cdot \frac{t^n}{n}, \quad |x| \leq 1.$$

307) Показать, что при $|t| < r$, где r — меньший из модулей корней квадратного уравнения $1 - 2xt + t^2 = 0$, справедливо равенство

$$\frac{1 - t^2}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n.$$

308) Доказать, что многочлены Чебышева $T_n(x)$ имеют на отрезке $[-1; 1]$ n различных корней.

309) Доказать, что для многочленов Чебышева справедливы равенства

$$\text{а) } T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x); \quad \text{б) } T_n(2x - 1) = T_{2n}(\sqrt{x}).$$

310) Доказать, что многочлен Чебышева можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{а) } T_n(x) &\equiv \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right]; \\ \text{б) } T_n(x) &\equiv \frac{(-2)^n n! 2^{n-1}}{(2n)!} \sqrt{1 - x^2} \frac{d^n (1 - x^2)^{n-1/2}}{dx^n}. \end{aligned}$$

311) Написать разложение следующей функции на $[-1; 1]$ по системе многочленов Чебышева

$$\text{а) } y = x^2; \quad \text{б) } y = x^3; \quad \text{в) } y = x^5; \quad \text{г) } y = |x|;$$

$$\text{д) } y = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ 2, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

312) Для функции $y = \arccos x$ найти на отрезке $[-1; 1]$ наилучшее среднеквадратичное приближение с весом $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ среди многочленов степени не выше седьмой.

313) Доказать, что многочлены Чебышева второго рода $U_n(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$U_{2n}(0) = (-1)^n; \quad U_{2n+1}(0) = 0.$$

314) Доказать, что для многочленов Чебышева второго рода справедливы соотношения

$$\int_{-1}^1 U_k(x) U_i(x) \sqrt{1 - x^2} dx = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ \frac{\pi}{2}, & k = i. \end{cases}$$

315) Доказать, что многочлены Чебышева первого рода $T_n(x)$ и многочлены Чебышева второго рода $U_n(x)$ удовлетворяют соотношению $T'_{n+1}(x) = (n+1)U_n(x)$.

316) Доказать, что многочлен Чебышева второго рода $U_n(x)$ является многочленом степени n .

317) Доказать, что многочлены Чебышева второго рода являются решением уравнения $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.

318) Доказать, что производящей функцией для многочленов Чебышева второго рода является функция

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2},$$

т. е. что справедливо соотношение

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \cdot U_n(x).$$

319) Введем следующие обозначения:

$$T_n^*(x) = T_n(2x - 1); \quad U_n^*(x) = U_n(2x - 1);$$

$$C_n(x) = 2 \cos \left(n \arccos \frac{x}{2} \right); \quad S_n(x) = \frac{2 \sin \left((n+1) \arccos \frac{x}{2} \right)}{\sqrt{4 - x^2}},$$

где $T_n(x)$ — многочлены Чебышева первого рода, а $U_n(x)$ — многочлены Чебышева второго рода.

Доказать соотношения

$$C_n(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) = 2T_n^*\left(\frac{x+2}{4}\right);$$

$$S_n(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right) = U_n^*\left(\frac{x+2}{4}\right);$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}C_n(2x) = T_n^*\left(\frac{1+x}{2}\right);$$

$$T_n^*(x) = \frac{1}{2}C_n(4x - 2);$$

$$U_n(x) = S_n(2x) = U_n^*\left(\frac{1+x}{2}\right);$$

$$U_n^*(x) = S_n(4x - 2).$$

320) Разложить следующую функцию по системе многочленов Чебышева второго рода

$$\text{а) } y = x^2; \quad \text{б) } y = x^3; \quad \text{в) } y = |x|.$$

Пусть $L_n(x)$ — многочлен Чебышева — Лагерра.

321) Доказать, что $L_n(x)$ есть многочлен степени n .

322) Доказать, что старший коэффициент у многочлена $L_n(x)$ равен $(-1)^n$, а свободный член равен $n!$.

323) Доказать, что многочлены $L_n(x)$ ортогональны с весом $\rho = e^{-x}$ на положительной полуоси, т. е.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

324) Доказать равенство $\int_0^{+\infty} e^{-x} L_n^2(x) dx = (n!)^2$.

325) Доказать, что многочлены $L_n(x)$ удовлетворяют рекуррентным формулам

$$\text{а) } (n+1)L_{n+1} - (2n+1-x)L_n + nL_{n-1} = 0;$$

$$\text{б) } L'_{n+1} - L'_n + L_n = 0;$$

$$\text{в) } xL'_n + (n+1-x)L_n - (n+1)L_{n+1} = 0.$$

326) Доказать, что производящей функцией для многочленов $L_n(x)$ является функция $\varphi(x, t) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}}$, т. е.

$$\frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

327) Доказать равенство $L_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k$.

328) Доказать рекуррентные формулы

$$\text{а) } L_{n+1} + (x-2n-1)L_n + n^2 L_{n-1} = 0;$$

$$\text{б) } L'_n - nL'_{n-1} + nL_{n-1} = 0;$$

$$\text{в) } xL'_n = nL_n - n^2 L_{n-1}.$$

329) Доказать, что функция $L_n(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

330) Разложить по системе многочленов $L_n(x)$ функцию $f(x) = e^{-x}$ на $(0; +\infty)$.

Пусть $L_n^\alpha(x)$ — обобщенные многочлены Лагерра.

331) Выписать многочлены $L_1^1(x)$, $L_1^2(x)$, $L_4^2(x)$, $L_3^2(x)$, $L_4^4(x)$.

332) Доказать равенство

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)} \cdot \frac{(-x)^k}{k!(n-k)!}.$$

333) Доказать, что производящей функцией для многочленов

$$L_n^\alpha(x) \text{ является функция } \varphi(t, \alpha, x) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n, \quad |t| < 1.$$

334) Доказать, что производящая функция $\varphi(t, \alpha, x)$ многочленов L_n^α удовлетворяет уравнению

$$\text{а) } (1-t^2)\varphi'_t + [x - (1-t)(1+\alpha)]\varphi = 0;$$

$$\text{б) } (1-t)\varphi'_x + t\varphi = 0.$$

Вывести отсюда рекуррентные соотношения для $L_n^\alpha(x)$:

$$\text{а) } (n+1)L_{n+1}^\alpha(x) + (x-\alpha-2n-1)L_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0;$$

$$\text{б) } x \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = nL_n^\alpha(x) + (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x);$$

$$\text{в) } \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} - \frac{dL_{n-1}^\alpha(x)}{dx} + L_{n-1}^\alpha(x) = 0.$$

335) Доказать, что производящая функция $\varphi(t, \alpha, x)$ многочленов L_n^α удовлетворяет соотношению

$$\text{а) } (1-t)\varphi(x, t, \alpha+1) = \varphi(x, t, \alpha);$$

$$\text{б) } \frac{\partial \varphi(x, t, \alpha)}{\partial x} = -t\varphi(x, t, \alpha+1).$$

Вывести отсюда рекуррентные формулы

$$\text{а) } L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n-1}^{\alpha+1}(x) = L_n^\alpha(x), \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\text{б) } \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

336) Доказать, что многочлены $L_n^\alpha(x)$ удовлетворяют уравнению $xy'' + (\alpha+1-x)y' + ny = 0$.

337) Доказать, что решения уравнений

$$xu'' + (1+\alpha-2\nu)u' + \left[n + \frac{1+\alpha}{2} - \frac{x}{4} + \frac{\nu(\nu-\alpha)}{x} \right] u = 0$$

и

$$u'' + \left[4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2} \right] u = 0$$

соответственно есть

$$u = e^{-\frac{x}{2}} x^\nu L_n^\alpha(x) \quad \text{и} \quad u = e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\alpha+\frac{1}{2}} L_n^\alpha(x^2).$$

Установить связь заданных уравнений и уравнения, которому удовлетворяет функция $L_n^\alpha(x)$ (см. задачу 336).

338) Получить интегральное представление полиномов $L_n^\alpha(x)$:

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x \cdot x^{-\frac{\alpha}{2}}}{n!} \int_0^{+\infty} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt, \quad \alpha > -1, \quad n = 1, 2, \dots$$

339) Используя результаты задач 338 и 350, получить формулы

$$L_n^{-1/2}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} \cdot n!} H_{2n}(\sqrt{x}); \quad L_n^{1/2}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} \cdot n!} \cdot \frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}},$$

связывающие функции Лагерра и Эрмита (см. гл. III § 10). Установить эту зависимость, исходя из определений функций $L_n^\alpha(x)$ и $H_m(x)$.

340) Получить интегральное уравнение для полиномов $L_n^\alpha(x)$:

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{2} \int_0^{+\infty} J_\alpha(\sqrt{xy}) e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(y) dy,$$

$$\alpha > -1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

341) а) Доказать, что при $n \neq m$ полиномы $L_n^\alpha(x)$ и $L_m^\alpha(x)$ ортогональны на положительной полуоси с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$,

$$\text{т. е.} \quad \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = 0, \quad n \neq m.$$

б) Доказать равенство

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha (L_n^\alpha(x))^2 dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha > -1,$$

т. е. функции

$$\varphi_n(x) = \left\{ \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \right\}^{1/2} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

образуют ортонормированную систему функций на $(0; +\infty)$.

342) Используя разложение производящей функции $\varphi(x, t, \alpha)$ для полиномов Лагерра, получить разложение по системе многочленов $L_n^\alpha(x)$ функции e^{-2ax} .

343) Разложить следующую функцию по системе полиномов $L_n^\alpha(x)$:

а) $y = x^3$; б) $y = x^4$;

в) $y = x^\nu$ ($\nu > -1/2(1 + \alpha)$);

г) $y = (xa)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xa})$, $a > 0$, $\alpha > -1$;

д) $y = x^{-\alpha} \gamma(\alpha, x)$, $\gamma(\alpha, x) = \int_0^\alpha e^{-t} t^{x-1} dt$.

344) Доказать формулу $L_p^{\alpha+\beta+1}(x+y) = \sum_{n=0}^p L_n^\alpha(x) L_{p-n}^\beta(y)$.

345) Доказать формулу

$$e^x x^{-\alpha} \gamma(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^\alpha(x)}{n+1}, \quad \alpha > -1, \quad 0 < x < \infty,$$

где $\gamma(\alpha, x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$. В частности, показать, что отсюда следует равенство

$$-e^x \text{Ei}(-x) \equiv e^x \gamma(0, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n+1}, \quad 0 < x < \infty.$$

Пусть $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$ — многочлены Чебышева—Эрмита.

346) Применяя производящую функцию $\varphi = e^{2xt-t^2}$, получить соотношения

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0.$$

347) Проверить рекуррентные соотношения

а) $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, n = 1, 2, \dots;$

б) $H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots;$

в) $H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H'_n(x) = 0, n = 1, 2, \dots$

348) Доказать, что $H_n(x)$ является решением уравнения

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0.$$

349) Доказать, что функция $u(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ является решением уравнения $u'' + (2n + 1 - x^2)u = 0$.

350) Используя значение интеграла

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2xt \, dt,$$

доказать, что

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1} \cdot (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2} \cdot (-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin 2xt \, dt,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е.

$$H_n(x) = \frac{2^{2n} \cdot (-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 + 2txi} \cdot t^n \, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

351) Используя результат задачи 350, доказать, что

$$W(x, y, t) = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2xyt - (x^2 + y^2)t^2}{1 - t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n \cdot n!} t^n,$$

$$|t| < 1.$$

Рассмотреть случай $x = y$.

352) Доказать справедливость соотношений

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2m}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} H_{2m}(y) \cos xy \, dy,$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2m+1}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} H_{2m+1}(y) \sin xy \, dy,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

353) Доказать, что полиномы $H_n(x)$ ортогональны на $(-\infty; +\infty)$ с весом e^{-x^2} , т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) \, dx = 0, \quad n \neq m.$$

354) Доказать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) \, dx = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x) \, dx, \quad n = 2, 3, \dots,$$

отсюда получить, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) \, dx = 2^{n-1} \cdot n! \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) \, dx = 2^n \cdot n! \sqrt{\pi},$$

$$n = 2, 3, \dots,$$

т. е. $\varphi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — ортонормированная система функций на $(-\infty; +\infty)$.

355) Доказать асимптотическое представление полиномов $H_n(x)$ при больших значениях n для любого конечного x :

$$H_n(x) = \left(2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cos \left(\sqrt{2n+1} x - \frac{\pi n}{2} \right) \right) (1 + \alpha(n)),$$

$$\alpha(n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

356) Доказать, что если $K_m(x, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^m \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n \cdot n!}$, то

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} K_m(x, y) e^{-y^2} \, dy = 1;$$

$$\text{б) } K_m(x, y) = \frac{H_{m+1}(x) H_m(y) - H_{m+1}(y) H_m(x)}{(x - y) \cdot 2^{m+1} \cdot m! \sqrt{\pi}}.$$

357) Используя тождество

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(y) e^{-y^2} dy \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(y) H_0(y) e^{-y^2} dy,$$

вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(y) e^{-y^2} dy$.

358) Доказать формулы:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \left(n + \frac{1}{2} \right);$$

$$\text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} H_n^2(x) dx = 2^{n-1/2} \Gamma \left(n + \frac{1}{2} \right);$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2} H_{2n}(x) dx = \frac{(2n)!}{n!} \frac{\sqrt{\pi}}{a} \left(\frac{1-a^2}{a^2} \right)^n, \\ n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\text{г) } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_p^2(x) H_{2n}(x) dx = \frac{2^{p+n} \cdot (2n)! (p!)^2 \sqrt{\pi}}{(p-n)! (n!)^2}, \\ p = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, p.$$

359) Доказать, что

$$\frac{1}{2^n \cdot n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx, \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

360) Доказать, что

$$I = \frac{\sqrt{n}}{2^n \cdot n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2} dx = O(1) \quad (n \rightarrow \infty).$$

361) Доказать, что если $\varphi(x)$ — кусочно-непрерывная функция на любом промежутке $(-a; a)$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)e^{-x^2}\varphi^2(x) dx < +\infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) \varphi(x) dx = 0.$$

362) Доказать, что

$$e^{-\frac{x^2}{2}} L_n(x) = \frac{1}{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} H_n^2(t) \cos \sqrt{2xt} dt$$

(здесь $L_n(x)$ — полиномы Чебышева—Лагерра (см. гл. III § 9)).

363) Доказать формулу

$$e^{-x^2} H_n^2(x) = \frac{2^n \cdot n!}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4}} L_n\left(\frac{s^2}{2}\right) \cos sx ds$$

(здесь $L_n(x)$ — полиномы Чебышева—Лагерра (см. гл. III § 9)).

364) Доказать, что полиномы $H_{2n+1}^2(x)$ удовлетворяют интегральному уравнению

$$\frac{e^{-x} H_{2n+1}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} J_1(2\sqrt{xy}) \frac{e^{-y} H_{2n+1}^2(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy$$

(здесь $J_1(x)$ — функция Бесселя (см. гл. III § 6)).

365) Доказать формулы:

$$a) H_p^2(x) = 2^p \cdot (p!)^2 \sum_{n=0}^p \frac{H_{2n}(x)}{2^n (n!)^2 (p-n)!}, \quad p = 0, 1, 2, \dots;$$

$$b) H_p(x) H_{p+r}(x) = 2^p (p+r)! p! \sum_{n=0}^p \frac{H_{2n+r}(x)}{2^n n! (n+r)! (p-n)!}, \\ p = 0, 1, 2, \dots, r = 0, 1, 2, \dots$$

366) Разложить в ряд по функциям $H_n(x)$ следующие функции:

а) $f(x) = x^{2p}$, $p = 0, 1, 2, \dots$, $|x| < \infty$;

б) $f(x) = x^{2p+1}$, $p = 0, 1, 2, \dots$, $|x| < \infty$;

в) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0; \end{cases}$

г) $f(x) = \Phi(ax)$, $|x| < \infty$, $\Phi(x)$ — интеграл вероятности (см. гл. III § 1);

д) $f(x) = e^{x^2} [1 - \Phi(x)]$, $0 \leq x < +\infty$;

е) $e^{x^2} [1 - \Phi^2(x)]$.

367) Получить следующие разложения по полиномам Чебышева — Эрмита:

а) $e^{t^2} \cos 2xt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}(x)}{(2n)!} t^n$, $|t| < \infty$;

б) $e^{t^2} \sin 2xt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!} t^n$, $|t| < \infty$.

Выражения в левых частях этих равенств можно рассматривать как производящие функции для четных и нечетных полиномов Чебышева — Эрмита.

368) Приблизить функцию $f(x) = xe^{\frac{x^2}{4}}$ с помощью многочленов Чебышева — Эрмита степени не выше пятой.

Пусть $h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n (e^{-\frac{x^2}{2}})}{dx^n}$ — многочлены Чебышева — Эрмита.

369) Доказать рекуррентную формулу для многочленов $h_n(x)$:

$$h_{n+1}(x) = xh_n(x) - h'_n(x).$$

370) Доказать, что коэффициент при x^n у многочлена $h_n(x)$ равен 1.

371) Доказать рекуррентные формулы для многочленов $h_n(x)$:

а) $h_{n+1}(x) = xh_n(x) - nh_{n-1}(x)$;

б) $h'_n(x) = nh_{n-1}(x)$.

372) Показать, что при $n > 0$

$$h_n^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1) h_{n-k}(x), \quad 0 < k \leq n.$$

373) Доказать, что многочлен $h_n(x)$ является решением уравнения $y'' - xy' + ny = 0$.

374) Доказать формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} h_m(x) h_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \sqrt{2\pi n!}, & m = n. \end{cases}$$

375) Доказать следующие представления многочленов $h_n(x)$:

$$h_{2n}(x) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k \cdot k!}{(2k)!} C_n^k x^{2k},$$

$$h_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k 2^k \cdot k!}{(2k+1)!} C_n^k x^{2k+1}.$$

376) Проверить равенства

$$h_{2n}(0) = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^n n!}, \quad h_{2n+1}(0) = 0,$$

$$h'_{2n}(0) = 0, \quad h'_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^n \cdot n!}.$$

377) Найти разложения следующих функций по системе функций $h_n(x)$:

$$\text{а) } y = \operatorname{ch} tx, \quad \text{б) } y = \operatorname{sh} tx, \quad \text{в) } y = \cos tx, \quad \text{г) } y = \sin tx.$$

378) Установить соотношение между функциями $H_n(x)$ и $h_n(x)$ (см. гл. III § 10).

379) Показать, что при любом $a > 0$

$$\int_0^a e^{-\lambda x^2} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

380) Показать, что для функции $f \in C^1[0; a]$

$$\int_0^a f(x) e^{-\lambda x^2} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} f(0), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

381) Пусть $a < 0 < b$ и функция $g \in C^2[a; b]$ удовлетворяет условиям: 1) $g(0) = 0$; 2) $g'(x) < 0$, $x \in [a; 0)$, $g'(x) > 0$, $x \in (0; b]$; 3) $g''(0) > 0$. Показать, что для $f \in C^1[a; b]$

$$\int_0^b f(x) e^{-\lambda x^2} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(0)}} f(0), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

382) Показать, что в условиях задачи 381

$$\int_a^0 f(x) e^{-\lambda x^2} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(0)}} f(0), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

383) Пусть $f \in C^1[a; b]$; $x_0 \in (a; b)$; функция $g \in C^2[a; b]$ и $g'(x) < 0$, $x \in [a; x_0)$, $g'(x) > 0$, $x \in (x_0; b]$, $g''(x_0) > 0$.

Показать, что

$$\int_a^b f(x) e^{-\lambda g(x)} dx \sim e^{-\lambda g(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(x_0)}} f(x_0), \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

384) Доказать формулу Стирлинга:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

385) Доказать, что если $\lambda \rightarrow +\infty$, то для любого $a > 0$

$$\int_0^a e^{i\lambda x^2} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i\pi/4}.$$

386) Пусть $f \in C^1[0; a]$ и $f(0) \neq 0$. Доказать, что при $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\text{имеем } \int_0^a f(x) e^{i\lambda x^2} dx \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i\pi/4} \cdot f(0).$$

387) Доказать формулы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right], \quad n \rightarrow +\infty.$$

Используя равенство $\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}$, получить формулу Валлиса $\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2$.

$$\text{б) } \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \theta} \cos n\theta \, d\theta = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}} [1 + O(x^{-1/2})], \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta \right)^n d\theta = \\ = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi n} \sqrt{x^2 - 1}} [1 + O(n^{-1/2})], \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\text{г) } \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n \, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\text{д) } \sum_{k=0}^n C_n^k k! n^{-k} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} [1 + O(n^{-1})], \quad n \rightarrow \infty.$$

Ответы, решения, указания

9) Указание. Представив функцию $\operatorname{erf}(x)$ в виде $\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$, сделать в интеграле замену $u = t^2$ и применить два раза интегрирование по частям, а также воспользоваться соотношениями

$$\int_{x^2}^{+\infty} e^{-u} u^{-5/2} du \leq e^{-x^2} \int_{x^2}^{+\infty} u^{-5/2} du = \frac{2}{3} e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x}, \quad u \rightarrow +\infty.$$

$$10) \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(2k+1)}, \quad |x| < \infty,$$

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^k \cdot k!(2k+1)}, \quad |x| < \infty.$$

$$11) \text{ а) } \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right); \quad \text{б) } e^{h^2 \alpha} \operatorname{erf}(h\sqrt{\alpha}).$$

13) Указание. Найти решение уравнения $y' = y - \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$ с начальным условием $y(0) = 1$ и применить теорему единственности задачи Коши.

16) б) Указание. В уравнение $F'(x) + 2xF(x) = 1$ подставить ряд $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ и получить рекуррентное соотношение $a_0 = 0, a_1 = 1, (k+1)a_{k+1} + 2a_{k-1} = 0$.

в) Указание. Применить два раза правило Лопиталя.

$$23) S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+3}}{(2k+1)!(4k+3)}, \quad |x| < \infty,$$

$$C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+1}}{(2k)!(4k+1)}, \quad |x| < \infty.$$

Указание. Разложить функции $\sin x^2$ и $\cos x^2$ в ряды и проинтегрировать почленно.

$$25) \frac{\sin x^2 + \cos x^2}{3x^3} + \frac{2(\cos x^2 - \sin x^2)}{3x} - \frac{4}{3}(S(x) - C(x)).$$

27) Указание. Использовать равенства

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi x^2}{2} (1 - t^2)}{1 - t^2} = \int_0^x u \cos \left[\frac{\pi u^2}{2} (1 - t^2) \right] du,$$

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin \frac{\pi x^2}{2} (1 + t^2)}{1 + t^2} = \int_0^x u \cos \left[\frac{\pi u^2}{2} (1 + t^2) \right] du$$

и изменить порядок интегрирования в двойном интеграле.

32) Указание. Записать выражение функции $\text{Ei}(x)$ в виде

$$\text{Ei}(x) = A + \int_a^x \left[\frac{e^t - 1}{t} + \frac{1}{t} \right] dt; \text{ разложить функцию } \frac{e^t - 1}{t} \text{ в}$$

ряд и проинтегрировать его почленно. Использовать выра-

жение производной Гамма-функции $\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^t \cdot t^{x-1} \ln t \, dt$ и равенство $\Gamma'(1) = -C_E$.

36) Указание. Проинтегрировав по частям интеграл $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$,

сделать оценку $\int_0^x \frac{dt}{\ln^2 t} \leq \int_0^x \frac{dt}{\ln^2 x} = \frac{x}{\ln^2 x}$.

37) Указание. Использовать разложение $\text{Si}(x)$ в ряд.

40) Указание. В интеграле $\int_{-\infty}^{-x} \frac{e^t}{t} dt$ сделать замену $t = -u$,

полученный интеграл три раза проинтегрировать по частям

и получить оценку $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^2} \frac{du}{u^2} \leq \frac{e^{-x}}{x^2} \int_x^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{e^{-x}}{x} \cdot \frac{1}{x^2}$.

41) См. указание к задаче 32).

$$54) \text{Si}(5x) + C. \quad 55) \frac{1}{2} \text{Ci}(2mx) + \frac{1}{2} \ln |x| + C.$$

$$56) -\frac{e^{mx}}{x} + m \text{Ei}(mx) + C. \quad 57) e^a \text{Ei}(x - a) + C.$$

$$58) \cos a \text{Si}(x - a) + \sin a \text{Ci}(x - a) + C.$$

$$59) \cos a \text{Ci}(x - a) - \sin a \text{Si}(x - a) + C.$$

- 60) $-\frac{e^{5x}}{x+2} + 5 \operatorname{Ei}(5x+10) + C.$
- 61) $-e^{-x} - \operatorname{Li}(e^{-x}) + C.$
- 62) $e^4 \operatorname{Li}(e^{2x-4}) - e^2 \operatorname{Li}(e^{2x-2}) + C.$
- 63) $\frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2} - \frac{32}{x-2} \right) + 64e^4 \operatorname{Li}(e^{2x-4}) + C.$
- 64) $-\frac{e}{2} \operatorname{Ei}(2x-2) - \frac{3}{4} \ln|x-1| + C.$
- 65) $2 \operatorname{Li}(x^2) - \operatorname{Li}(x) + C.$
- 66) $\operatorname{Li}(x^3) - \operatorname{Li}(x^2) + 2 \operatorname{Li}(x) + C.$
- 67) $\frac{e^x}{x} - 2 \operatorname{Ei}(x) + e \operatorname{Ei}(x-1), \quad x < 0.$
- 68) $-\frac{\cos 3x \operatorname{Ci}(2x)}{3} + \frac{\operatorname{Ci}(5x) + \operatorname{Ci}(x)}{6} + C.$
- 69) $\frac{1}{2} \sin 2x \operatorname{Si}(3x) + \frac{1}{4} [\operatorname{Ci}(5x) - \operatorname{Ci}(x)] + C.$
- 70) $-\frac{1}{4} \cos 4x \operatorname{Si}(5x) + \frac{1}{8} [\operatorname{Si}(9x) - \operatorname{Si}(x)] + C.$
- 71) $\frac{1}{2} \sin 2x \operatorname{Ci}(x) - \frac{1}{4} [\operatorname{Si}(3x) + \operatorname{Si}(x)] + C.$
- 72) $x \operatorname{Ci}^2(2x) + \frac{1}{4} \operatorname{Si}(4x) - \sin 2x \operatorname{Ci}(2x) + C.$
- 73) $x \operatorname{Si}(2x) \operatorname{Ci}(2x) + \frac{1}{2} [\cos 2x \operatorname{Ci}(2x) - \sin 2x \operatorname{Si}(2x) - \operatorname{Ci}(4x)] + C.$
- 74) $\frac{\pi}{2\gamma}$ при $|\gamma| > 1$; $\frac{\pi}{4}$ при $|\gamma| = 1$; 0 при $|\gamma| < 1$. Указание. В случае $\gamma \neq 0$ проинтегрировать по частям. В случае $\gamma = 0$ проинтегрировать по частям два раза и применить вторую теорему о среднем. Использовать оценку
- $$\left| \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt \right| \leq C + |\ln x|.$$
- 75) $\frac{\pi}{2\gamma}$ при $|\gamma| > 1$; $\frac{\pi}{4}$ при $|\gamma| = 1$; 0 при $|\gamma| < 1$.
- 76) $\frac{1}{2\gamma} \ln \left| \frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right|$ при $\gamma \neq 0, \gamma \neq 1, \gamma \neq -1$; 1 при $\gamma = 0$.

- 77) $\frac{1}{\gamma} \ln |1 - \gamma^2|$ при $\gamma \neq 0, \gamma \neq 1, \gamma \neq -1$; 0 при $\gamma = 0$.
- 78) $\frac{1}{\gamma} \ln(1 + \gamma)$ при $\gamma > 0$; 1 при $\gamma = 0$.
- 79) $\frac{\pi}{2\alpha}$ при $\alpha \geq \beta$; $\frac{\pi}{2\beta}$ при $\alpha \leq \beta$.
- 80) $\frac{\pi}{2\alpha}$ при $\alpha \geq \beta$; $\frac{\pi}{2\beta}$ при $\alpha \leq \beta$.
- 81) $\frac{1}{2\alpha} \ln \left| \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right| + \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{|\alpha^2 - \beta^2|}{\alpha^2} \right)$ при $\alpha \neq \beta$; $\frac{1}{\alpha} \ln 2$ при $\alpha = \beta$.
- 82) $\ln \left(\frac{(\alpha + \beta)^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}}{\alpha^{\frac{1}{\beta}} \beta^{\frac{1}{\alpha}}} \right)$.
- 83) $\frac{1}{3} t \sqrt{t^4 - 5t^2 + 4} + \frac{10}{3} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^4 - 5t^2 + 4}} - \frac{4}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 5t^2 + 4}}$.
- 84) $-\frac{1}{5} t^3 \sqrt{1 - t^4} + \frac{3}{5} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^4}}$.
- 85) $\frac{1}{3} t \sqrt{t^4 - 1} - 2 \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^4 - 1}} + \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t^4 - 1}}$.
- 86) $\int \frac{2 dt}{\sqrt{(t^2 - 2)(t^2 - 3)}}$. Указание. Замена $x = -1 + t^2$.
- 87) $\int \frac{2 dt}{\sqrt{(t^2 + 1)(t^2 + 3)}}$. Указание. Замена $x = 2 + t^2$.
- 88) $\frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + 3)(t^2 + \frac{1}{3})}}$. Указание. Замена $x = \frac{t - 1}{t + 1}$.
- 89) $\frac{1}{a} F(k, \varphi)$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{b}$, $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.
- 90) $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \{K(k) - F(k, \varphi)\}$,
 $\varphi = \arccos \frac{x}{b}$, $k = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
- 91) $\frac{1}{a} \{K(k) - F(k, \varphi)\}$, $\varphi = \arcsin \frac{a}{x}$, $k = \frac{b}{a}$.
- 92) $\frac{1}{a} F(k, \varphi)$, $\varphi = \arcsin \frac{x}{b}$, $k = \frac{b}{a}$.

- 93) $\frac{1}{a} \{K(k) - F(k, \varphi)\}, \quad \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$
- 94) $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} F(k, \varphi), \quad \varphi = \arccos \frac{b}{x}, \quad k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$
- 95) $a \{F(k, \varphi) - E(k, \varphi)\}, \quad \varphi = \arcsin \frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{a}.$
- 96) $a \{E(k) - E(k, \varphi)\}, \quad \varphi = \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$
- 97) $\frac{\sqrt{x^2 - a^2} \cdot \sqrt{x^2 - b^2}}{x} + a \{K(k) - F(k, \varphi)\} - a \{E(k) - E(k, \varphi)\},$
 $\varphi = \arcsin \frac{a}{x}, \quad k = \frac{b}{a}.$
- 98) $\frac{x\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{b^2 + x^2}} - aE(k, \varphi), \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{b}, \quad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$
- 99) $\sqrt{a^2 + b^2} \{E(k) - E(k, \varphi)\} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} (K(k) - F(k, \varphi)),$
 $\varphi = \arccos \frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$
- 100) $\frac{\sqrt{a^2 + x^2} \sqrt{x^2 - b^2}}{x} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} F(k, \varphi) - \sqrt{a^2 + b^2} E(k, \varphi),$
 $\varphi = \arccos \frac{b}{x}, \quad k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$
- 101) $\frac{x\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{b^2 - x^2}}{3} + \frac{a(2a^2 + b^2)}{3} F(k, \varphi) -$
 $-\frac{2a(a^2 + b^2)}{3} E(k, \varphi), \quad \varphi = \arcsin \frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{a}.$
- 102) $\frac{x\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{b^2 - x^2}}{3} + \frac{a(b^2 - a^2)}{3} F(k, \varphi) +$
 $+\frac{a(b^2 + a^2)}{3} E(k, \varphi), \quad \varphi = \arcsin \frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{a}.$
- 103) $\frac{\sqrt{a^2 + x^2} \sqrt{x^2 - b^2}}{x} + \sqrt{a^2 + b^2} \{F(k, \varphi) - E(k, \varphi)\},$
 $\varphi = \arccos \frac{b}{x}, \quad k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

$$104) \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{b^2+x^2}} + a\{F(k, \varphi) - E(k, \varphi)\},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{x}{b}, \quad k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

$$105) aE(k, \varphi) - \frac{a^2-b^2}{a}F(k, \varphi), \quad \varphi = \arcsin \frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{a}.$$

$$106) aE(k, \varphi), \quad \varphi = \arcsin \frac{x}{b}, \quad k = \frac{b}{a}.$$

$$107) \frac{1}{k^2}\{F(k, \varphi) - E(k, \varphi)\}, \quad x = \sin \varphi.$$

$$108) \frac{1}{k^2}E(k, \varphi) - \frac{1-k^2}{k^2}F(k, \varphi), \quad x = \sin \varphi.$$

$$109) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{1-k^2}\sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi} - \frac{1}{1-k^2}E(k, \varphi).$$

$$110) \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi}}{1-k^2}\operatorname{tg} \varphi + F(k, \varphi) - \frac{E(k, \varphi)}{1-k^2}.$$

$$111) \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi} + F(k, \varphi) - E(k, \varphi).$$

$$112) \operatorname{tg} \varphi \sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi} + F(k, \varphi) - 2E(k, \varphi).$$

$$113) \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right)\right\}, \quad x = \cos \varphi.$$

$$114) \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}, \quad x = \cos \varphi.$$

$$115) \frac{1}{2}F\left(\frac{1}{2}, \varphi_0\right), \quad \sin \varphi_0 = 2 \sin t_0, \quad \sin \psi = 2 \sin x.$$

$$116) \sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right), \quad x = \cos \varphi.$$

$$117) \frac{1}{2}\sqrt{15} - \sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3}\right), \quad \cos \varphi = \frac{1}{x}.$$

$$118) \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}E\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$119) \frac{1}{3}\sqrt{55} - 2\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \arccos \frac{2}{3}\right) + \sqrt{2}F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \arccos \frac{2}{3}\right).$$

$$120) \ 2E\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 \varphi} = \frac{1}{x}.$$

$$121) \ 3E\left(\frac{2}{3}, \frac{\pi}{6}\right), \quad 2\sin \varphi = x.$$

$$122) \ \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{3}F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3}E\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$123) \ \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{\sqrt{17}}{4} \left(F\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{\pi}{3}\right) - E\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{\pi}{3}\right) \right).$$

$$124) \ \frac{1}{8} \left(F\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right) - E\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \right).$$

$$125) \ \sqrt{3}E\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$126) \ \sqrt{\frac{7}{3}} - 2\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6}\right).$$

$$127) \ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{17}{18}} + \frac{1}{3}F\left(\frac{1}{3}, \frac{\pi}{4}\right) - \frac{2}{3}E\left(\frac{1}{3}, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$128) \ \frac{\sqrt{2}}{3} + 6\sqrt{2}F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{4}\right) - \frac{15}{\sqrt{2}}E\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$129) \ \sqrt{2}F\left(\sin \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \theta.$$

$$130) \ \frac{1}{k} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) K(k) - \frac{2}{k} E(k) \right].$$

$$131) \ \frac{1}{\sqrt{2}}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$132) \ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right) \right).$$

$$133) \ \frac{1}{\sqrt{3}}F\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{\pi}{3}\right).$$

$$134) \ \frac{1}{2} \left(K\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}, \arcsin \frac{2}{3}\right) \right).$$

$$135) \sqrt{2} \left(F \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{arctg} \sqrt{2} \right) - F \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

$$136) \sqrt{2} \left(F \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \operatorname{arcsin} 0,6 \right) - F \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{6} \right) \right).$$

$$137) E(k, \varphi) = a_0 - \frac{1}{2}a_2k^2 - \frac{1}{2 \cdot 4}a_4k^4 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}a_6k^6 - \dots - \\ - \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}a_{2n}k^{2n} - \dots,$$

$$a_{2n} = \int_0^\varphi \sin^{2n} \psi \, d\psi, \quad a_0 = \varphi, \quad a_1 = \frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4}.$$

$$F(k, \varphi) = a_0 + \frac{1}{2}a_2k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}a_4k^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}a_6k^6 + \dots + \\ + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}a_{2n}k^{2n} + \dots,$$

$$a_{2n} = \int_0^\varphi \sin^{2n} \psi \, d\psi, \quad a_0 = \varphi, \quad a_1 = \frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4}, \dots$$

$$142) 1,31103. \text{ Указание. } a = \sqrt{2}, b = 1; a_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, b_1 = \sqrt[4]{2}.$$

$$143) aE(\varepsilon) - aE\left(\varepsilon, \frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \alpha = \arccos \frac{x}{a}.$$

$$144) 4aK\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \quad 147) 4\sqrt{2}E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$148) \frac{8R^3}{3} [(1+k^2)E(k) - (1-k^2)K(k)], \quad k = \frac{r}{R}.$$

$$149) 8R(R+r)[E(k) - (1-k)K(k)], \quad k = \frac{r}{R}.$$

$$150) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}. \quad 152) 6) 0,915965 \dots$$

$$153) \text{ в) Указание. Пусть } k = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ тогда } k' = k, E' = E, \\ K' = K \text{ и тождество принимает вид}$$

$$2EK - K^2 = (2E - K)K = C.$$

Применить результат а) и б).

- 154) $\frac{\pi}{8}$. 155) $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. 156) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.
 157) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 158) $\frac{\pi}{3}$. 159) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.
 160) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 161) $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. 162) $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.
 163) $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$. 164) $\frac{\pi a^4}{16}$.
 165) $\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!2^{2n+2}} \cdot a^{2n+2} \pi$. 166) $\frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 3n} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.
 167) $\frac{3\pi}{512}$. 168) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.
 169) $\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right)^2$.

Указание. Сделать замену $\cos x = 1 - 2\sqrt{u}$.

- 170) $\frac{\Gamma(b+1)}{\alpha^{b+1}}$. 171) $\frac{\Gamma(\frac{b+1}{2})}{2\alpha^{\frac{b+1}{2}}}$. 172) $\frac{2}{27}\pi^2$. 173) $\frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$.
 174) $\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})\Gamma(n+1) - \Gamma'(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{(\Gamma(n+1))^2}$.
 175) $\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\Gamma'(n+1)\Gamma(\frac{1}{2}) - \Gamma'(\frac{1}{2})\Gamma(n+1)}{(\Gamma(n+1))^2}$.
 176) $\frac{1}{\pi} \left(1 + \ln \frac{\pi}{2}\right)$. Указание. Сделать замену $x = 1 - t$ и применить формулу дополнения для функции $\Gamma(x)$.
 177) $\frac{1}{4n}$. Указание. Сделать замену $x = 1 - t$ и применить формулу дополнения для функции $\Gamma(x)$. Представив интеграл

$$\int_0^1 \ln \sin \pi x \cos 2n\pi x \, dx \text{ в виде}$$

$$\int_0^{1/2} \ln \sin \pi x \cos 2n\pi x \, dx + \int_{1/2}^1 \ln \sin \pi x \cos 2n\pi x \, dx,$$

в первом интеграле сделать замену $\frac{\pi}{2} - \pi x = y$, а во втором — $\pi x - \frac{\pi}{2} = y$.

- 178) $0 < m+1 < n$, $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi(m+1)}{n}}$.
- 179) $-\frac{1}{2} < m < n - \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi}$.
- 180) $0 < m+1 < n$, $B(n-m-1, m+1)$.
- 181) $0 < \frac{m+1}{n} < p$, $\frac{a^{-p}}{n} \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}} B\left(\frac{m+1}{n}, p - \frac{m+1}{n}\right)$.
- 182) $\alpha > 0$, $\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2})}$.
- 183) $p > 0$, $q > 0$, $\frac{1}{m} \frac{\Gamma(\frac{p}{m}) \Gamma(q)}{\Gamma(\frac{p}{m} + q)}$.
- 184) $p > 0$, $q > 0$, $\frac{B(p, q)}{(\alpha + \gamma)^p (\beta + \gamma)^q}$. Указание. Сделать замену $\frac{(\alpha + \gamma)x}{\alpha x + \beta(1-x) + \gamma} = t$.
- 185) $n < 1$, $\frac{1}{m} B\left(\frac{1}{m}, 1-n\right)$.
- 186) $\frac{(b-a)^{m+n+1}}{(a+c)^{n+1}(b+c)^{m+1}}$, $m > -1$, $n > -1$. Указание. Сделать замену $\frac{x-a}{x+c} = \frac{b-a}{b+c} t$.
- 187) $m > 0$, $n > 0$. $2^{m+n-2} B(m, n)$. Указание. Сделать замену $t = \frac{1}{2} \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$.
- 188) $1 < m < 2$. $\frac{\pi}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi(m-1)}{2}}$.
- 189) $0 < m < 1$. $\frac{\pi}{2(1-m)} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi(1-m)}{2}}$.
- 190) $1 < m < 2$. $\frac{a^{m-1}}{m-1} B(2-m, m-1)$.
- 191) а) $\alpha > 0$, $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}$; б) $\alpha > 0$, $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}$.
- 192) $|\alpha| < 1$, $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\alpha\pi}{2}}$.

193) $n > 0$, $\frac{2^{n-1}}{(1-k^2)^{n/2}} B\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)$. Указание. Сделать замену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

194) $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. $\frac{\pi}{2 \sin(\pi \cos^2 \alpha)}$. Указание. В интеграле задачи 187 положить $n = 1 - m$, $2m - 1 = \cos 2\alpha$ и сделать подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

195) $\alpha > 0$, $\frac{2^{\alpha-1}}{(1-k^2)^{\alpha/2}} \cdot \frac{\Gamma^2(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\alpha)}$. Указание. Сделать подстановку $\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

196) $\frac{m+1}{n} > 0$, $\frac{1}{|n|} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$.

197) $p > -1$, $\Gamma(p+1)$.

198) $0 < p < 1$, $\frac{-\pi^2 \cos \pi p}{\sin^2 \pi p}$. Указание. Данный интеграл является производной по p от функции $B(p, 1-p)$.

199) $|\alpha| < 1$, $\frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{\sin \frac{\pi \alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\pi \alpha}{2}}$.

200) $0 < p < 1$, $\pi^3 \cdot \frac{1 + \cos^2 \pi p}{\sin^3 \pi p}$.

201) $|\alpha| < 1$, $\frac{\pi^3}{8} \cdot \frac{1 + \sin^2 \frac{\pi \alpha}{2}}{\cos^3 \frac{\pi \alpha}{2}}$.

202) $\pi \operatorname{ctg} \pi p$. Указание. Доказать возможность предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0+$ под знаком интеграла

$$\int_0^1 (x^{p-1} - x^{-p})(1-x)^{-1+\varepsilon} dx.$$

Использовать формулу $\Gamma(\varepsilon) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$ и применить правило Лопиталя.

203) $\pi \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi p}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi q}{2}} \right|$.

204) $\frac{\pi}{2\beta} \operatorname{tg} \frac{\pi \alpha}{2\beta}$. Указание. Сделать замену $e^{-2\beta x} = t$ и использовать результат задачи 202.

$$205) \frac{\pi}{2\nu} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\pi\mu}{2\nu}}.$$

206) Указание. Сделать замену $x^n = t$, использовать формулу дополнения и непрерывность функции $\Gamma(x)$, $x > 0$

218) Указание. Полагая $x^n = t$, доказать, что

$$\prod_{m=1}^n \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x^n} dx = \frac{1}{n^n} \prod_{m=1}^n \Gamma\left(\frac{m}{n}\right).$$

Записывая произведение $\prod_{m=1}^n \Gamma\left(\frac{m}{n}\right)$ в прямом и обратном порядке и применяя формулу дополнения для функции $\Gamma(x)$, получить, что

$$\prod_{m=1}^n \Gamma\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\sqrt{\pi^{n-1}}}{\sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n}}}.$$

Для вычисления произведения $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n}$ разложить двучлен $z^n - 1$ на множители $(z - 1)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})$, $z_k = e^{ik \frac{2\pi}{n}}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, и использовать равенства

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n - 1}{z - 1} = n = \lim_{z \rightarrow 1} \prod_{k=1}^{n-1} (z - e^{ik \frac{2\pi}{n}}) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{ik \frac{2\pi}{n}}),$$

$$\left| 1 - e^{ik \frac{2\pi}{n}} \right| = 2 \sin \frac{\pi k}{n}.$$

219) Указание. Положить

$$I_1 = \int_0^1 (1-x^3)^{-1/2} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} (x^3-1)^{-1/2} dx, \quad I_3 = \int_{-\infty}^0 (1-x^3)^{-1/2} dx$$

и применить к этим интегралам соответственно подстановки

$$x^3 = t, \quad \frac{1}{x^3} = t, \quad \frac{1}{x^3 + 1} = t.$$

$$221) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha^{m-1}}{\cos \frac{\pi m}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(m)}.$$

$$222) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha^{m-1}}{\cos \frac{\pi m}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma(m)}.$$

$$223) -\frac{\pi}{2}C_2.$$

$$224) \frac{\pi}{2}C_2^2 + \frac{\pi^3}{24}.$$

$$225) \text{ а) } -C_2; \text{ б) } -C_2; \text{ в) } -\frac{\sqrt{\pi}}{4}(C_2 + 2 \ln 2); \text{ г) } \Gamma''(1) = C_2^2 + \frac{\pi^2}{6};$$

$$\text{ д) } \frac{\sqrt{\pi}}{8} \left[(C_2 + 2 \ln 2)^2 + \frac{\pi^2}{2} \right].$$

$$226) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

$$227) \frac{\Gamma'(q+1)}{\Gamma(q+1)} - \frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)}.$$

$$228) \text{ а) } \ln \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}, \text{ б) } \ln \frac{\Gamma(\alpha+\gamma+1)\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)},$$

$$\text{ в) } \ln \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}, \text{ г) } \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2}. \text{ Указание. В интеграле п. б) }$$

сделать замену $x = t^2$, положить $\gamma = \frac{1}{2}$. В интеграле п. в) положить $\beta = 1 - a$.

$$229) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{2n} - \ln 2 \right).$$

Указание. Продифференцировать по α данную формулу. К полученному результату применить формулу Гаусса (см. формулу (16) гл. III) и положить $2\alpha - 1 = 2n$.

$$230) \frac{\pi\sqrt{2}}{3}.$$

$$231) \frac{\pi a^2}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{m}\right)}; \frac{a}{m} \cdot 2^{\frac{1}{m}-1} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}. \text{ Указание. Использовать формулу Лежандра (см. пример 12 гл. III § 5).}$$

$$232) \frac{a^3 \Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{3n^2 \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

234) Сходится. 235) Сходится. 236) Расходится. 237) Сходится. 238) Сходится. 239) 1. 240) $\Gamma(\alpha)$.

241) Указание. Вычисляя каждое из трех слагаемых в уравнении для функции $y(x) = J_\nu(x)$ имеем:

$$\left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) J_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu^2 \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-2}}{4k! \Gamma(k+\nu+1)},$$

$$\frac{1}{x} J'_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\nu + 2k) \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-2}}{4k! \Gamma(k + \nu + 1)},$$

$$J''_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu + 2k)(\nu + 2k - 1)}{4k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k-2}.$$

Учитывая, что $\Gamma(m + \nu + 1) = (m + \nu) \Gamma(m + \nu)$, показать, что C_m — коэффициент при сложении рядов при $\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2m-2}$ — для $m \geq 1$ равен

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)! \Gamma(m + \nu)} - \frac{(-1)^m \nu^2}{4m! \Gamma(m + \nu + 1)} + \frac{(-1)^m (\nu + 2m)}{4m! \Gamma(m + \nu + 1)} + \\ & + \frac{(-1)^m (\nu + 2m)(\nu + 2m - 1)}{4m! \Gamma(m + \nu + 1)} = \frac{(-1)^m}{4m! \Gamma(m + \nu + 1)} \times \\ & \times [-4m(m + \nu) - \nu^2 + \nu + 2m + (\nu + 2m)(\nu + 2m - 1)] = 0, \\ & C_0 = -\frac{\nu^2}{4\Gamma(\nu + 1)} + \frac{\nu}{4\Gamma(\nu + 1)} + \frac{\nu(\nu - 1)}{4\Gamma(\nu + 1)} = 0. \end{aligned}$$

Для определения радиуса сходимости рядов применить признак Даламбера.

244) Указание. Показать, что $J_{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k}}{k! \Gamma(k - n + 1)}$, и в этом ряде ввести новую переменную суммирования $m = k - n$.

$$\begin{aligned} 245) \text{ а) } x^\nu \frac{d}{dx} \left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right) &= x^\nu \cdot \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1} \cdot 2k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k) \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} = \\ &= - \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{\Gamma(l + 1) \Gamma(l + (\nu + 1) + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l+\nu+1} = \\ &= -J_{\nu+1}(x). \text{ Решение п. б) проводится аналогично.} \end{aligned}$$

$$246) J_2(x) = \frac{2}{x} J_1 - J_0;$$

$$J_3(x) = \frac{4}{x} J_2 - J_1 = \frac{4}{x} \left(\frac{2}{x} - J_1 - J_0 \right) - J_1;$$

$$J_4(x) = \frac{24-x^2}{x^2} J_2 - \frac{6}{x} J_1.$$

248) Указание. Проверить, что функция

$$y_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

удовлетворяет уравнению Бесселя и начальным условиям

$$y_0(0) = 1, \quad y_n(0) = 0, \quad y'_0(0) = y'_{n+1}(0) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad y'_1(0) = \frac{1}{2};$$

использовать результат задачи 243 и свойство единственности решения дифференциального уравнения.

251) Указание. Использовать результат задачи 249.

252) Указание. Используя результат задачи 250, выписать интегральные представления для $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, $J_3(x)$ и применить метод математической индукции.

253) Указание. Применить формулу

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{1}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 t^{2k}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt,$$

вытекающую из равенства $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, и после подстановки $\Gamma(n+\nu+1)$ в ряд для $J_\nu(x)$ изменить порядок суммирования и интегрирования.

254) Указание. Выписать ряд для $J_0(x)$ и оценить остаток, используя то, что остаток есть ряд типа Лейбница:

$$\left| J_0(x) - 1 + \frac{x^2}{4} \right| \leq \frac{x^4}{64}.$$

255) Указание. Воспользоваться рядами для определения функций $J_{\pm\nu}(x)$.

256) Рассмотрим уравнение Бесселя и сделаем замену $y = \frac{v(x)}{\sqrt{x}}$, тогда получим уравнение $v'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right)v = 0$.

Это уравнение есть частный случай уравнения

$$v'' + (1 + \alpha(x))v = 0, \tag{1}$$

где $\alpha(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x \rightarrow +\infty$. Положим $v(x) = \gamma \sin(x + \delta)$, $v' = \gamma \cos(x + \delta)$, где $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ — некоторые функции, причем $\gamma(x) \neq 0$ ни при каком x . Из соотношений

$$v' = \gamma \cos(x + \delta) = \gamma' \sin(x + \delta) + \gamma \cos(x + \delta)(1 + \delta'),$$

$$v'' = \gamma' \cos(x + \delta) - \gamma(\delta' + 1) \sin(x + \delta) = -(1 + \alpha)\gamma \sin(x + \delta),$$

находим

$$\delta' = \alpha(x) \sin^2(x + \delta) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma'}{\gamma} &= -\frac{\delta'}{\operatorname{tg}(x + \delta)} = \\ &= -\alpha(x) \sin(x + \delta) \cos(x + \delta) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как $\delta(x) = \delta(a) - \int_x^a \delta'(s) ds$, то в силу (2) получаем, что существует $\lim_{a \rightarrow +\infty} \delta(a) = \delta$ и $\delta(x) = \delta + O\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \rightarrow +\infty$. Из (3) находим аналогичными рассуждениями, что

$$\gamma(x) = \gamma \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \gamma \neq 0.$$

Следовательно, любое решение уравнения (1) при $x \rightarrow +\infty$ имеет вид $v(x) = \gamma \sin(x + \delta) + O\left(\frac{1}{x}\right)$, а решение уравнения Бесселя имеет вид

$$y_\nu(x) = \gamma \frac{\sin(x + \delta)}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$258) J_{3/2}(x) = \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x - \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\sin x}{x} - \cos x \right];$$

$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{x \sin x + \cos x}{x} \right);$$

$$J_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \sin x}{x^2} - \frac{3 \cos x}{x} - \sin x \right);$$

$$J_{-5/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{x^2 \cos x - 3x \sin x - 3 \cos x}{x^2} \right).$$

Указание. Применить рекуррентные формулы задачи 246.

260) Указание. Применить рекуррентную формулу задачи 252 а), положив $\nu = 1/2$, и использовать значение $J_{1/2}(x) =$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

262) Указание. Использовать результат задачи 260.

263) а) Из формулы задачи 245 б) следует, что

$$x^\nu J_{\nu-1}(x) = [x^\nu J_\nu(x)]',$$

откуда $\int x^\nu J_{\nu-1}(x) dx = \int (x^\nu J_\nu(x))' dx = x^\nu J_\nu(x) + C$.

б) Указание. Использовать формулу задачи 245 а).

в) Указание. Использовать формулу $J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$ задачи 246.

г) Установить рекуррентные интегральные соотношения

$$\int J_{\nu+2}(x) dx = \int J_\nu(x) dx - 2J_{\nu+1}(x).$$

264) а) Указание. Функции $y = J_\nu(\alpha x)$ и $z = J_\nu(\beta x)$ удовлетворяют соответственно уравнениям (см. задачу 242)

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (\alpha^2 x^2 - \nu^2) y = 0,$$

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + x \frac{dz}{dx} + (\beta^2 x^2 - \nu^2) z = 0.$$

Умножив первое уравнение на $\frac{z}{x}$, второе — на $\frac{y}{x}$, вычтем из первого полученного соотношения второе и получить

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \left(z \frac{dy}{dx} - y \frac{dz}{dx} \right) \right\} = (\beta^2 - \alpha^2) x y z.$$

Проинтегрировать затем полученное уравнение от 0 до x , заменив $y(x)$ на $J_\nu(\alpha x)$, а $z(x)$ — на $J_\nu(\beta x)$. Применив формулы

$$\frac{d}{dx} J_\nu(\alpha x) = \alpha J'_\nu(\alpha x), \quad J'_\nu(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

(см. задачу 245 а)), получим требуемое соотношение.

б) Указание. В данном интеграле сделать замену $\alpha x = u$ и получить равенство

$$\int_0^x x J_\nu^2(\alpha x) dx = \frac{x^2}{2} J_\nu^2(\alpha x) - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{\alpha x} u^2 J_\nu(u) J'_\nu(u) du;$$

показать, что $u^2 J_\nu^2(u) \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$ (см. задачу 255) при $\nu > -1$. В силу уравнения Бесселя

$$-x^2 J_\nu(x) = x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) - \nu^2 J_\nu(x).$$

Умножив обе части этого равенства на $J'_\nu(x)$, получить выражение для $-x^2 J_\nu(x) J'_\nu(x)$:

$$-x^2 J_\nu(x) J'_\nu(x) = \frac{1}{2} [x^2 J_\nu'(x)]' - \frac{\nu^2}{2} (J_\nu^2(x))',$$

откуда следует необходимое утверждение.

265) Указание. Использовать формулы задачи 264.

267) Указание. Заменить $J_\nu(\beta x)$ степенным рядом, проинтегрировать полученный ряд почленно.

268) Указание. Сделать в интегралах Френеля замену $t^2 = u$ и использовать выражения для $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ (см. гл. III § 5).

269) Указание. Использовать формулу интегрирования по частям и соотношения задачи 263.

270) Указание. В силу того, что функция $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ есть производящая функция для функций Бесселя, и тождества

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)(z-\frac{1}{z})} = e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} e^{\frac{1}{2}y(z-\frac{1}{z})}$$

имеем

$$e^{\frac{1}{2}(x+y)(z-\frac{1}{z})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x+y) z^k,$$

$$e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) z^m, \quad e^{\frac{1}{2}y(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(y) z^n.$$

В силу абсолютной сходимости этих рядов их можно почленно перемножить, поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) z^m \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(y) z^n &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_m(x) J_n(y) z^{n+m} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^k \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) J_{k-m}(y). \end{aligned}$$

Так как получен ряд для функции $e^{\frac{1}{2}(x+y)(z-\frac{1}{z})}$, то

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} J_k(x+y) z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) J_{k-m}(y) \right) z^k.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z^k , получаем $J_k(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) J_{k-m}(y)$.

271) а) Указание. Рассмотреть производящую функцию $e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}$ для $J_n(x)$ и положить в ней $z = e^{i\varphi}$, тогда

$$e^{ix \sin \varphi} = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [J_k(x) e^{ik\varphi} + J_{-k}(x) e^{-ik\varphi}].$$

Так как $J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x)$ при k целом (см. задачу 244), то $e^{ix \sin \varphi} = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x) [e^{ik\varphi} + (-1)^k e^{-ik\varphi}]$.

б) Указание. Использовать результат задачи 271 п. а).

274) Указание. Показать, что производящей функцией для $I_\nu(x)$ будет функция $e^{\frac{x}{2}(z+\frac{1}{z})}$, предварительно доказав, что

функция $I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$ есть решение уравнения $x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0$.

В формуле $e^{\frac{x}{2}(z+\frac{1}{z})} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x) z^k$ положить $z = e^{i\varphi}$ и $z = ie^{i\varphi}$.

277) Указание. С помощью рекуррентной формулы

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J'_\nu(x)$$

показать, что производные от обеих частей рассматриваемого равенства совпадают.

278) Указание. Применить формулу

$$x^{\nu+1} J_{\nu}(x) = \frac{d}{dx}(x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x))$$

и интегрирование по частям.

279) Указание. Применить результат задачи 277.

282) Указание. Достаточно доказать, что этому уравнению удовлетворяет функция $y = R_n^{(n)}(x)$, где $R_n = (x^2 - 1)^n$. Продифференцировать $(n+1)$ раз равенство

$$(x^2 - 1)R_n'(x) = 2nxR_n(x).$$

283) Рассмотрим производящую функцию $\varphi(t, x)$ многочленов Лежандра. При $x = 1$ и $x = -1$ имеем

$$\varphi(t, 1) = \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + \dots,$$

$$\varphi(t, -1) = \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \dots + (-1)^n t^n + \dots.$$

Эти ряды сходятся абсолютно при $|h| < 1$. Функция $\varphi(t, x)$ монотонна по x при фиксированном t ($|t| < 1$), причем $\varphi(t, -1) = \frac{1}{1+t} < \varphi(t, x) < \frac{1}{1-t} = \varphi(t, 1)$, $|x| \leq 1$. Непрерывная функция $(1 - \theta t)^{-1}$ при фиксированном t как функция θ принимает все промежуточные значения между $(1+t)^{-1}$ и $(1-t)^{-1}$. Значит, для каждого x ($|x| \leq 1$) найдется такое $\theta(x)$, $|\theta(x)| \leq 1$, что $\varphi(t, x) = (1 - \theta(x)t)^{-1}$. Разлагая эту функцию в ряд, получим

$$\varphi(t, x) = (1 - \theta(x)t)^{-1} = 1 + \theta(x)t + \theta^2(x)t^2 + \dots + \theta^n(x)t^n + \dots.$$

Поскольку $\varphi(t, x) = P_0(x) + tP_1(x) + \dots + t^n P_n(x) + \dots$, то, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем, что $P_n(x) = \theta^n(x)$, $|x| \leq 1$. Так как $|\theta(x)| \leq 1$, то и $|P_n(x)| = |\theta^n(x)| \leq 1$ при $|x| \leq 1$.

284) а) Указание. Доказать, что производящая функция $\varphi(t, x)$ многочленов Лежандра удовлетворяет равенству

$$(1 + h^2 - 2xh) \frac{d\varphi}{dt} - (x - t)\varphi = 0.$$

Подставить в это равенство ряд $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ и собрать коэффициенты при одинаковых степенях t .

б) Указание. Использовать равенство задачи 281.

в) Указание. Использовать равенство $(1 - 2xt + t^2) \frac{d\varphi}{dx} - t\varphi = 0$ и продифференцировать равенство, полученное в п. а).

г) Указание. Сложить равенства п. б) и в).

д) Указание. Заменить в п. в) n на $n - 1$ и исключить из найденного равенства и равенства п. б) $P'_{n-1}(x)$.

е) Указание. Продифференцировать равенство п. д) и, используя равенство п. б), исключить $P'_{n-1}(x)$.

285) Указание. В разложении $(1 - 2tx + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$ положить x равным ± 1 или 0 и затем разложить левую его часть по степеням t .

286) Из формулы для $P_n(x)$ имеем, что $P_n(x)$ содержит только степени x той четности, что и номер n .

287) Указание. Использовать рекуррентную формулу а) задачи 284. $A_n = \frac{(2n-1)!!}{n!}$.

288) При $n = 0$ и $n = 1$ справедливость формулы устанавливается непосредственно. Докажем, что справедливо рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Обозначим $z = x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta$, тогда

$$A = (n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[(n+1) \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta \right)^{n+1} - (2n+1)x \times \right. \\ \left. \times \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta \right)^n + n \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta \right)^{n-1} \right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[-n(x^2 - 1) \sin^2 \theta + \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta \right) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta \right] \times \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta \right)^{n-1} d\theta. \quad (4)$$

Обозначим

$$u = -n(x^2 - 1) \sin^2 \theta, \quad v = \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta \right] \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta,$$

тогда интеграл (4) перепишется в виде

$$A = \int_0^{\pi} u z^{n-1} d\theta + \int_0^{\pi} v z^{n-1} d\theta.$$

Поскольку

$$\int_0^{\pi} v z^{n-1} d\theta = \sqrt{x^2 - 1} \int_0^{\pi} z^n \cos \theta d\theta = \\ = \sqrt{x^2 - 1} \left(z^n \sin \theta \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin \theta n z^{n-1} \sqrt{x^2 - 1} \sin \theta d\theta \right) = \\ = n(x^2 - 1) \int_0^{\pi} z^{n-1} \sin^2 \theta d\theta = - \int_0^{\pi} u z^{n-1} d\theta,$$

то $A = 0$. Следовательно, поскольку $P_0(x)$ и $P_1(x)$ совпадают с нулевым и первым многочленами Лежандра, то также будут совпадать с многочленами Лежандра и многочлены P_n при всех n . Из этой формулы, в частности, следует, что поскольку

$$\left| x + \sqrt{1 - x^2} \cos \theta \right| = \left| x + i \sqrt{x^2 - 1} \cos \theta \right| = \\ = \sqrt{x^2 + (1 - x^2) \cos^2 \theta} = \sqrt{x^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \leq 1, \quad |x| \leq 1,$$

то $|P_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1$ (см. задачу 283).

289) Для внутренних точек $|x| < 1$ имеем из предыдущей задачи

$$|P_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| x + i \sqrt{1 - x^2} \cos \theta \right|^n d\theta =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\sqrt{1 - (1 - x^2) \sin^2 \theta} \right)^n d\theta = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - x^2) \sin^2 \theta)^{n/2} d\theta + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (1 - (1 - x^2) \sin^2 \theta)^{n/2} d\theta.
\end{aligned}$$

Сделаем во втором интеграле замену $\theta = \pi - \varphi$, тогда

$$|P_n(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - x^2) \sin^2 \theta)^{n/2} d\theta.$$

Поскольку для $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ справедливо неравенство $\frac{2}{\pi} \theta \leq \sin \theta$ и при неотрицательных α неравенство $1 - \alpha < e^{-\alpha}$, то

$$\begin{aligned}
|P_n(x)| &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - x^2) \sin^2 \theta)^{n/2} d\theta \leq \\
&\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left[1 - (1 - x^2) \frac{4\theta^2}{\pi^2} \right]^{n/2} d\theta \leq \\
&\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2n}{\pi^2}(1-x^2)\theta^2} d\theta < \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2n}{\pi^2}(1-x^2)\theta^2} d\theta.
\end{aligned}$$

Полагая здесь $\theta = \frac{\pi t}{\sqrt{2n(1-x^2)}}$, имеем

$$\begin{aligned}
|P_n(x)| &< \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2n(1-x^2)}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \\
&= \frac{2}{\sqrt{2n(1-x^2)}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n(1-x^2)}}.
\end{aligned}$$

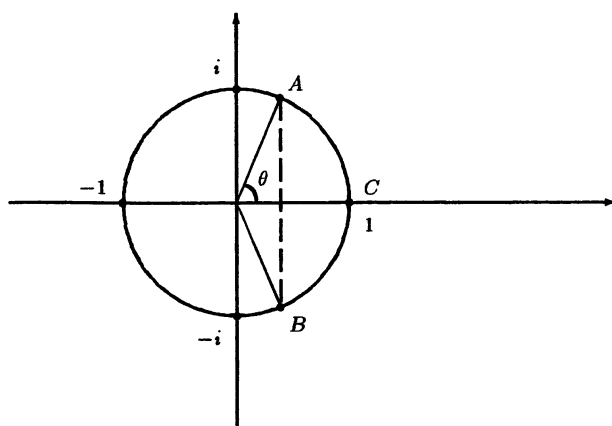


Рис. 18

290) Положим $x = \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$), тогда

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + \sqrt{\cos^2 \theta - 1} \cos \varphi)^n d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^n d\varphi. \end{aligned}$$

Введем новую переменную $t = \cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi$. Тогда

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi i} \int_{e^{-i\theta}}^{e^{i\theta}} \frac{t^n dt}{\sqrt{1 - 2t \cos \theta + t^2}},$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку AB , $A = e^{-i\theta}$, $B = e^{i\theta}$, причем при $t = \cos \theta$ значение корня равно $\sin \theta$. По теореме Коши (об интеграле по замкнутому контуру от аналитической функции) интеграл по AB равен интегралу по дуге ACB (рис. 18). Полагая $t = e^{i\psi}$, находим, что

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\psi}}{\sqrt{2 \cos \psi - 2 \cos \theta}} d\psi$$

и после отделения вещественной части получаем, что

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos(n + \frac{1}{2}) \varphi}{\sqrt{2 \cos \varphi - 2 \cos \theta}} d\varphi.$$

291) Указание. Применить $m + 1$ раз формулу интегрирования по частям для интеграла $\int_{-1}^{+1} Q_m(x) R_n^{(n)}(x) dx$, где $R_n = (x^2 - 1)^n$, и использовать равенства

$$R_n(\pm 1) = 0, \quad R'_n(\pm 1) = 0, \dots, \quad R_n^{(n-1)}(\pm 1) = 0, \quad Q_m^{m+1}(x) \equiv 0.$$

292) Указание. Применить рекуррентную формулу а) задачи 284 два раза: сначала выразить из нее (заменив $n + 1$ на n) P_n через P_{n-1} и P_{n-2} , а затем xP_n через P_{n+1} и P_{n-1} . Учитывая ортогональность полиномов P_n , P_{n-1} и P_{n+2} , получим, что

$$\begin{aligned} \|P_n\|^2 &= \frac{1}{n} \int_{-1}^1 P_n(x) \{ (2n-1)xP_{n-1}(x) - (n-1)P_{n-2} \} dx = \\ &= \frac{2n-1}{n} \int_{-1}^1 (xP_n(x))P_{n-1}(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \|P_{n-1}\|^2. \end{aligned}$$

Последовательное применение этой формулы дает равенство $\|P_n\|^2 = \frac{1}{2n+1} \|P_0\|^2$, откуда, так как $\|P_0\|^2 = \|1\|^2 = 2$, имеем $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

293) Предположим, что $P_n(x)$ имеет кратный корень x_0 . Тогда $P_n(x_0) = P'_n(x_0) = 0$. В этом случае из формулы б) задачи 284 следует, что $P_{n-1}(x_0) = 0$. Используя формулу а) задачи 284, получим, что

$$P_{n-2}(x_0) = \frac{1}{n-1} [(2n-1)x_0P_{n-1}(x_0) - nP_n(x_0)] = 0.$$

Заменяя в этой формуле n на $n-1$, получим также, что $P_{n-3}(x_0) = 0$ и далее $P_{n-4}(x_0) = \dots = P_0(x_0) = 0$. Однако $P_0(x) \equiv 1$, и равенство $P_0(x_0) = 0$ невозможно. Покажем, что

все корни находятся на отрезке $[-1; 1]$. Предположим, что на отрезке $[-1; 1]$ всего $0 \leq m < n$ корней. Обозначим их $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Рассмотрим многочлен

$$Q_m(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m).$$

$Q_k(1) > 0$, так как все $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, m$, меньше единицы. Далее, $P_n(1) = 1 > 0$, поэтому $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ имеют одинаковые знаки на отрезке $[-1; 1]$, так как корни у них общие, а знаки в точке $x = 1$ совпали. Следовательно, $Q_m(x)P_n(x) > 0, |x| \leq 1$ (кроме точек $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$). Но тогда

$$\int_{-1}^1 Q_m(x)P_n(x) dx > 0.$$

При $m < n$ это противоречит результату задачи 291. Значит, $m = n$.

295) Указание. а) Воспользоваться формулой д) задачи 284.

$\frac{n(n+1)}{2n+1}$. б) Воспользоваться формулой а) задачи 284.

$\frac{4n^3+6n^2-1}{(2n-1)(2n+1)^2(2n+3)}$. в) Использовать представление $P_n(x)$

с помощью производящей функции (см. § 7 гл. III пример 22).

0 при $m = 2n, \frac{1}{2}$ при $n = 1, \frac{(-1)^k(2k-1)!!}{(2k+2)!!}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$.

296) а) $y = P_1(x)$;

$$\text{б) } y = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x);$$

$$\text{в) } y = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}P_1(x);$$

$$\text{г) } y = \frac{8}{35}P_4(x) + \frac{20}{35}P_2(x) + \frac{10}{35}P_0(x);$$

$$\text{д) } y = \frac{1}{2} - \frac{5}{8}P_2(x) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}(4m+1)(2m-3)!!}{(2m+2)!!} P_{2m}(x), |x| \leq 1;$$

- е) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}P_1(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m+3)(2m-1)!!}{2 \cdot (2m+2)!!} \times P_{2m+1}(x);$
- ж) $y = P_1(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (4m+3)(2m-1)!!}{(2m+2)!!} P_{2m+1}(x).$
- 297) $-\frac{3}{2\pi^2} \left[5 - \frac{108}{\pi^2} + \frac{105}{\pi^4} \right] P_1(x) + \frac{21}{2\pi^4} \left(1 - \frac{15}{\pi^2} \right) P_3(x).$
- 298) Указание. Воспользоваться формулой г) задачи 284.
- 299) Указание. Воспользоваться неравенством $|ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$
- 300) а) Уравнению удовлетворяет функция $u = P_n(\cos \theta).$
- б) Уравнению удовлетворяет функция $u = \sqrt{\sin \theta} \cdot P_n(\cos \theta).$
- 301) Указание. Записать уравнение б) задачи 300 в виде

$$u'' + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 u = -\frac{u}{4 \sin^2 \theta}$$

и получить формулу

$$\begin{aligned} u(\theta) = & P_n(0) \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \\ & + \frac{P'_n(0)}{n + \frac{1}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \\ & + \frac{1}{4 \left(n + \frac{1}{2} \right)} \int_0^{\pi/2} u(\varphi) \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) (\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

Используя формулы

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(m + 1)}, \quad P_{2m+1}(0) = 0,$$

$$P'_{2m}(0) = 0, \quad P'_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{2\Gamma(m + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(m + 1)},$$

получаем, что равенство (5) можно записать в виде

$$u(\theta) = \alpha_n \left\{ \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right] + r_n(\theta) \right\},$$

где α_n обозначает первое или второе из выражений

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\sqrt{\pi}\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}$$

в зависимости от того, четное или нечетное n , и

$$r_n(\theta) = \frac{1}{4\alpha_n\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi/2} u(\varphi) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Если M_n — максимум модуля $u(\theta)$ в интервале $\delta \leq \theta \leq \pi - \delta$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, то имеем

$$|u(\theta)| \leq \alpha_n + \frac{\pi M_n}{4(2n+1)} \operatorname{cosec}^2 \delta, \quad M_n \leq \alpha_n + \frac{\pi M_n}{4(2n+1)} \operatorname{cosec}^2 \delta,$$

откуда

$$M_n \leq \alpha_n \left[1 - \frac{\pi}{4(2n+1)} \operatorname{cosec}^2 \delta \right]^{-1}, \quad 2n+1 > \frac{\pi}{4} \operatorname{cosec}^2 \delta,$$

$$|r_n(\theta)| \leq \frac{\pi \operatorname{cosec}^2 \delta}{4(2n+1)} \left[1 - \frac{\pi}{4(2n+1)} \operatorname{cosec}^2 \delta \right]^{-1},$$

$$2n+1 > \frac{\pi}{4} \operatorname{cosec}^2 \delta$$

и, следовательно,

$$r_n(\theta) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$u(\theta) = \alpha_n \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right] + \alpha_n \cdot O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Из формулы Стирлинга $\alpha_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$, $n \rightarrow \infty$, и для $u(\theta)$ имеем

$$u(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

откуда

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \theta}} \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right] + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right),$$

$$n \rightarrow \infty, \quad \delta \leq \theta \leq \pi - \delta.$$

304) Указание. Использовать тождество

$$\cos(n-2)t + \cos nt = 2 \cos(n-1)t \cos t$$

305) а) 1; б) $(-1)^n$; в) $(-1)^n$; г) 0.

311) а) $\frac{1}{2}T_2 + \frac{1}{2}T_0$; б) $\frac{3}{4}T_3 + \frac{3}{4}T_1$;

в) $\frac{1}{16}T_5 + \frac{20}{16}\left(\frac{3}{4}T_3 + \frac{3}{4}T_1\right) - \frac{5}{16}T_1$;

г) $\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \frac{1}{4}} T_{2n}(x)$; д) $1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} T_{2n+1}(x)$.

$$\begin{aligned} 312) \quad & \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}T_1 - \frac{4}{9\pi}T_3 - \frac{4}{\pi}T_5 - \frac{4}{49\pi}T_7 = \\ & = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{76}{105}x - \frac{248}{315}x^3 - \frac{288}{175}x^5 - \frac{64}{49}x^7 \right). \end{aligned}$$

320) а) $\frac{1}{4}U_0 + \frac{1}{4}U_2$; б) $\frac{1}{4}U_1 + \frac{1}{8}U_3$;

в) $\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n - \frac{1}{2})(n + \frac{3}{2})} U_{2n}(x)$.

321) Указание. Применить метод математической индукции.

322) Указание. Применить метод математической индукции.

323) Рассмотрим интеграл

$$J_{mn} = \int_0^{+\infty} L_m(x) L_n(x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} L_m(x) \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n} dx.$$

Пусть $m \leq n$. Интегрируя по частям m раз, получим

$$J_{mn} = (-1)^m \int_0^{+\infty} \frac{d^m L_m}{dx^m} \cdot \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^n e^{-x}) dx.$$

Если $m < n$, то интегрируя еще раз, имеем $J_{mn} = 0$, так как $\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} L_m = 0$.

324) Указание. См. решение задачи 323. В случае $m = n$ имеем $\frac{d^n L_n}{dx^n} = (-1)^n n!$. Поэтому

$$J_{nn} = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} (-1)^n x^n e^{-x} dx = (n!)^2.$$

325) Указание. Доказать, что производящая функция удовлетворяет равенствам

$$(1-t)^2 \varphi_t - (1-t-x) \varphi = 0, \quad (1-t) \varphi_x + t \varphi = 0.$$

Подставить в них ряд $\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n$ и приравнять коэффициен-

ты при t^{n+1} к 0, откуда получить формулы а) и б).

в) Заменить в а) n на $n+1$ и продифференцировать по x . Затем, применяя формулу б), исключить L'_{n+2} и L'_{n+1} .

326) Указание. Разложить функцию $\varphi(x, t)$ в степенной ряд в круге $|t| < 1$, где $C_n(x)$ определяются по формуле Коши

$$\frac{1}{1-t} e^{\frac{-xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad C_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(x, t)}{t^{n+1}} dt.$$

Здесь γ — любой замкнутый контур, охватывающий точку $t = 0$ и лежащий в круге $|t| < 1$. Ввести новую переменную интегрирования $u = \frac{x}{1-t}$. Тогда

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \frac{n!}{2\pi i} \int \frac{e^{\frac{-xt}{1-t}}}{(1-t)t^{n+1}} dt = \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{e^{x-u} u^n du}{(u-x)^{n+1}} = \frac{e^x n!}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{e^{-u} u^n du}{(u-x)^{n+1}}, \end{aligned}$$

где γ_1 — образ контура γ , охватывающий точку $u = x$. Интеграл вычислить с помощью вычетов

$$C_n(x) = e^x \cdot \frac{n!}{n!} \lim_{u \rightarrow x} \frac{d^n (e^{-u} u^n)}{dx^n} = e^x \frac{d^n (e^{-x} x^n)}{dx^n},$$

т. е. коэффициенты $C_n(x)$ совпадают с многочленами Лагерра $L_n(x)$.

329) Указание. Продифференцировать соотношение в) задачи 325 и исключить L'_{n+1} при помощи соотношения б) задачи 325.

$$330) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{2^{n+1}}.$$

$$331) \begin{aligned} L_1^1 &= 2 - x; & L_2^1 &= x^2 - 6x + 6; \\ L_4^2 &= -(x^4 - 24x^3 + 180x^2 - 480x + 360); \\ L_3^2 &= (x^3 - 15x^2 + 60x - 60). \end{aligned}$$

332) Указание. Применить формулу Лейбница.

333) Указание. Доказательство аналогично доказательству задачи 326.

334) Указание. Подставить разложение производящей функции в соотношения а) и б) и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях t .

335) Указание. См. указание к задаче 334.

336) Указание. Использовать результаты задач 334, 335.

338) Указание. В равенстве, полученном в примере 20 гл. III § 6, положить

$$a = 1, \quad b = 2\sqrt{x}, \quad x = \sqrt{t}, \quad \nu = n + \alpha,$$

тогда имеем

$$x^{n+\alpha} e^{-x} = \int_0^{+\infty} (\sqrt{xt})^{n+\alpha} J_{n+\alpha}(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt,$$

где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя.

Дифференцируя это равенство по x и принимая во внимание равенство $\frac{d}{du} u^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{u}) = u^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(2\sqrt{u})$, которое следует из равенства $\frac{d}{dz} (z^\nu J_\nu(z)) = z^\nu J_{\nu-1}(z)$ при $z = 2\sqrt{u}$ (см. задачу 245 б)), имеем

$$\frac{d^m}{dx^m} (x^{m+\alpha} e^{-x}) = \int_0^{+\infty} (\sqrt{xt})^{n-m+\alpha} J_{m-n+\alpha}(2\sqrt{xt}) t^m e^{-t} dt,$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Полагая здесь $m = n$, получаем требуемую формулу

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha/2}}{n!} \int_0^{+\infty} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt,$$

$$\alpha > -1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

339) Из предыдущей задачи с учетом формул для $J_{\pm 1/2}(x)$ имеем

$$L_n^{-1/2}(x) = \frac{e^x}{n! \sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-\frac{1}{2}} \cos(2\sqrt{xt}) dt =$$

$$= \frac{e^x}{n!} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2n} \cos 2\sqrt{x}u du,$$

$$L_n^{1/2}(x) = \frac{e^x}{n! \sqrt{\pi} \sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n \sin(2\sqrt{xt}) dt =$$

$$= \frac{e^x}{n \sqrt{x!}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2n+1} \sin 2\sqrt{x}u du,$$

откуда на основании интегральных представлений для полиномов Эрмита (см. задачу 350) получаем требуемые соотношения.

340) Указание. Воспользоваться разложением

$$(1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n, \quad |t| < 1, \quad \alpha > -1,$$

заменить в нем x на y ; умножив на $e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{xy})$, где $J_\alpha(x)$ — функция Бесселя, проинтегрировать по промежутку $(0; +\infty)$. Доказать возможность почленного интегрирования ряда и получить соотношение

$$(1-t)^{-\alpha-1} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1+t}{1-t} y^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{xy}) dy =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{xy}) L_n^\alpha(y) dy.$$

Для вычисления интеграла в левой части положить $\sqrt{y} = u$ и воспользоваться значением интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} J_\nu(bx) x^{\nu+1} dx$ (пример 20 гл. III § 6). Сравнив коэффициенты при одинаковых степенях t в равенстве

$$2x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n^\alpha(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(\sqrt{xy}) L_n^\alpha(y) dy,$$

получить требуемое уравнение.

341) а) Указание. Рассмотреть функции $u_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^\alpha(x)$ и $u_m(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_m^\alpha(x)$ и дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют (см. задачу 337):

$$(xu'_n)' + \left(n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x}\right) u_n = 0,$$

$$(xu'_m)' + \left(m + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x}\right) u_m = 0.$$

Умножив первое из них на $u_m(x)$, а второе — на $u_n(x)$ и интегрируя по промежутку $(0; +\infty)$, имеем

$$x(u'_n u_m - u'_m u_n) \Big|_0^{+\infty} + (n-m) \int_0^{+\infty} u_m u_n dx = 0,$$

откуда следует требуемое утверждение.

б) Указание. Для вычисления $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha L_n^2(x) dx$ соотношение а) задачи 325 умножить на $L_{n-1}^\alpha(x)$; уравнение, полученное из этого соотношения заменой n на $n-1$ умножить на $L_n^\alpha(x)$ и вычесть полученные соотношения. Затем умножить полученное равенство на $x^\alpha e^{-x}$ и, проинтегрировав по промежутку $(0; +\infty)$, получить соотношение

$$n \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha (L_n^\alpha(x))^2 dx = (n+\alpha) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha (L_{n-1}^\alpha(x))^2 dx,$$

$$n = 2, 3, \dots,$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha (L_n^\alpha(x))^2 dx = \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+2)}{n(n-1)\dots 3\cdot 2} \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha (L_1^\alpha(x))^2 dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, \quad n=2, 3, \dots$$

Полученная формула справедлива и при $n=0$, $n=1$, что проверяется непосредственно.

$$342) (2a+1)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2a}{2a+1}\right)^n L_n^\alpha(x).$$

$$343) \text{ а) } 6\Gamma(4+\alpha) \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)(3-n)!};$$

$$\text{б) } 24\Gamma(5+\alpha) \sum_{n=0}^4 \frac{(-1)^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)(4-n)!};$$

$$\text{в) } \Gamma(\nu+\alpha+1)\Gamma(\nu+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n L_n^\alpha(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\nu-n+1)}, \quad \alpha > -1;$$

$$\text{г) } e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^\alpha(x);$$

$$\text{д) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^\alpha(x)}{2^{n+\alpha}(n+\alpha)}, \quad \alpha > 0.$$

344) Указание. Воспользоваться производящей функцией для $L_n^\alpha(x)$.

345) Указание. Равенство для e^{-ax} (пример 25 гл. III § 9) умножить на $(a+1)^{\alpha-1}$ и проинтегрировать по промежутку $(0; +\infty)$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} (a+1)^{\alpha-1} da = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) \int_0^{+\infty} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \frac{da}{(a+1)^2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^\alpha(x)}{n+1}.$$

В интеграле слева положить $a = \frac{t}{x} - 1$.

346) Указание. Полагая в равенстве $e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$

$x = 0$ и разлагая функцию e^{-t^2} в степенной ряд, сравнить коэффициенты при одинаковых степенях t .

347) а) Указание. Замечая, что степенной ряд можно дифференцировать почленно, подставить функцию

$$\varphi(x, t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \quad |t| < \infty,$$

в тождество

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} - (2x - 2t)\varphi = 0.$$

б) Указание. Использовать тождество $\frac{\partial \varphi}{\partial x} - 2t\varphi = 0$, $\varphi = e^{2xt-t^2}$.

348) Указание. Использовать рекуррентные соотношения предыдущей задачи.

351) Указание. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{2^n \cdot n!} t^n &= \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (2t)^n \times \\ &\times \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{-u^2-v^2+2uxi+2vyi} (uv)^n du dv = \\ &= \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{-u^2-v^2+2uxi+2vyi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2uvt)^n}{n!} du dv = \\ &= \frac{e^{x^2+y^2}}{\pi} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} e^{-u^2-v^2+2uxi+2vyi-2uvt} du dv. \end{aligned}$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 y^2 - 2by} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{\frac{b^2}{a^2}}$, то значение двойного интеграла равно $W(x, y, t)$.

352) Указание. Заменить в разложении производящей функции для $H_n(x)$ x на y , умножить полученный ряд на $e^{ixy - \frac{y^2}{2}}$ и проинтегрировать по промежутку $(-\infty; +\infty)$. Проверить справедливость равенств

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2yt - t^2 - \frac{y^2}{2} + ixy} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \frac{y^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} t^n dy = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy - \frac{y^2}{2}} \cdot H_n(y) dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2yt - t^2 - \frac{y^2}{2} + ixy} dy &= \sqrt{2\pi} e^{t^2 + 2txi - \frac{x^2}{2}} = \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ti)^n}{n!} H_n(x). \end{aligned}$$

Сравнить коэффициенты при одинаковых степенях t в этих равенствах.

353) Указание. Применить результат задачи 349 к функциям $u_n(x)$ и $u_m(x)$. Получить соотношение

$$\frac{d}{dx}(u'_n u_m - u'_m u_n) + 2(n - m)u_m u_n = 0,$$

которое проинтегрировать затем по промежутку $(-\infty; +\infty)$.

354) Указание. В рекуррентном соотношении задачи 347 а) заменить n на $n - 1$, умножить полученное соотношение на $H_n(x)$, а исходное соотношение — на $H_{n-1}(x)$ и вычесть одно из новых полученных соотношений из другого. Полученное равенство умножить на e^{-x^2} и проинтегрировать по промежутку $(-\infty; +\infty)$.

355) Указание. Рассмотреть дифференциальное уравнение для функции $u = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, записав его в виде

$$u'' + (2n - 1)u = x^2 u,$$

откуда, учитывая начальные условия $u(0) = H_n(0)$, $u'(0) = H'_n(0)$, получить равенство

$$u(x) = H_n(0) \cos \sqrt{2n+1}x - H'_n(0) \frac{\sin \sqrt{2n+1}x}{\sqrt{2n+1}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \int_0^x y^2 u(y) \sin [\sqrt{2n+1}(x-y)] dy.$$

Используя соотношения

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)}, \quad H_{2m+1}(0) = 0, \\ H'_{2m}(0) = 0, \quad H'_{2m+1}(0) = 2 \cdot (-1)^m \frac{\Gamma(2m+2)}{\Gamma(m+1)},$$

записать $u(x)$ в виде

$$u(x) = \alpha_n \left[\cos \left(\sqrt{2n+1}x - \frac{\pi n}{2} \right) + r_n(x) \right],$$

где $\alpha_n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, если n четное; $\alpha_n = \frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+\frac{1}{2})\sqrt{2n+1}}$, если n нечетное и

$$r_n(x) = \frac{1}{\alpha_n \sqrt{2n+1}} \int_0^x y^2 u(y) \sin (\sqrt{2n+1}(x-y)) dy.$$

Доказать, используя неравенство Буняковского—Шварца, что

$$|r_n(x)| \leq \frac{(2^n(n!)\sqrt{\pi})^{1/2}}{\alpha_n \sqrt{2n+1}} \cdot \frac{|x|^{5/2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \beta_n |x|^{5/2}.$$

Используя формулу Стирлинга, получить, что

$$\alpha_n \sim e^{-\frac{n}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{1}{2}}, \quad |r_n(x)| \leq C |x|^{5/2} n^{-1/4},$$

следовательно,

$$u(x) \sim \alpha_n \cos \left(\sqrt{2n+1}x - \frac{\pi n}{2} \right), \quad n \rightarrow \infty,$$

и

$$H_n(x) \sim 2^{\frac{n+1}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot e^{-\frac{n}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cos \left(\sqrt{2n+1}x - \frac{\pi n}{2} \right), \quad n \rightarrow \infty.$$

356) а) Указание. Использовать соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(y) e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} H_n(y) H_0(y) dy = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ \sqrt{\pi}, & n = 0. \end{cases}$$

б) Указание. Рекуррентное соотношение задачи 347 а) умножить на $H_n(y)$ и вычесть из полученного уравнения такое же уравнение с переставленными x и y ; разделить полученное равенство на $2^n \cdot n!$ и просуммировать по n от 1 до m .
357) $\sqrt{\pi}$ при $n = 0$; 0 при $n \neq 0$.

358) Указание. При вычислении интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) H_n^2(x) dx$

умножить обе части равенства $(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{2x^2 t}{1+t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n^2(x)}{2^n \cdot n!} t^n$

(см. задачу 351) на $f(x)$, проинтегрировать по промежутку $(-\infty; +\infty)$ и вычислить значение $\varphi(t)$ интеграла в левой части равенства. Разложить функцию $\varphi(t)$ в степенной ряд и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях t в обеих частях рассматриваемого равенства.

359) Указание. См. указание к предыдущей задаче.

360) Указание. Воспользоваться равенством (см. задачу 359)

$$I = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx.$$

Представить этот интеграл в виде

$$\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx + \int_1^{+\infty} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n \frac{e^{-x^2}}{1+x^2} dx \right)$$

и во втором интеграле сделать замену $\frac{1}{x} = t$. Поскольку $e^{-x^2} + (-1)^n e^{-\frac{1}{x^2}} \leq 2$ для $0 \leq x \leq 1$, то

$$I \leq \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^n \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\sqrt{n} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Необходимая оценка следует из асимптотических формул для Γ -функции.

361) Указание. Представить данный интеграл в виде суммы трех интегралов: по промежутку $(-\infty; -a)$, по промежутку $(-a; a)$ и по промежутку $(a; +\infty)$. Применяя неравенство Буняковского—Шварца, доказать, что

$$|J_{(-\infty, -a)}| \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2} dx \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\int_{-\infty}^{-a} (1+x^2) e^{-x^2} \varphi^2(x) dx \right)^{1/2}, \\ |J_{(a, +\infty)}| \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_n^2(x)}{1+x^2} e^{-x^2} dx \right)^{1/2} \times \\ \times \left(\int_a^{+\infty} (1+x^2) e^{-x^2} \varphi^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Используя результат предыдущей задачи, показать, что

$$|J_{(-\infty; -a)}| < \varepsilon, \quad |J_{(a; +\infty)}| < \varepsilon$$

при большом a . Для таких a , заменяя в интеграле $J_{(-a; a)}$ полином Эрмита выражением $\alpha_n \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \left(\cos \sqrt{2n+1}x - \frac{\pi n}{2} \right) + r_n(x)$, где $\alpha_n \sim e^{-\frac{n}{2}} 2^{\frac{n+1}{2}}$ и $|r_n| \leq C|x|^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{1}{4}}$ при $n \rightarrow \infty$ (см. указание к задаче 355), показать, что

$$J_{(-a; a)} = \frac{\alpha_n \cdot n^{1/4}}{(2^n \cdot n! \sqrt{\pi})^{1/2}} \times \\ \times \left[\alpha_n \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi(x) \cos \left(\sqrt{2n+1}x - \frac{\pi n}{2} \right) dx + \right. \\ \left. + \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi(x) r_n(x) dx \right]$$

стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$.

362) Указание. См. указание к задаче 358.

363) Указание. Применить результат задачи 362 и теорему об обращении Фурье.

364) Указание. См. указание к задаче 358.

365) а) Указание. Применить результат задачи 358.

б) Указание. При $r = 1$ результат получить дифференцированием формулы п. а). В общем случае применить метод математической индукции.

$$366) \text{ а) } \frac{(2p)!}{2^{2p}} \sum_{n=0}^p \frac{H_{2n}(x)}{(2n)!(p-n)!};$$

$$\text{б) } \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}} \sum_{n=0}^p \frac{H_{2n+1}(x)}{(2n+1)!(p-n)!};$$

$$\text{в) } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}(x)}{2^{2n}(2n+1)n!};$$

$$\text{г) } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1} H_{2n+1}(x)}{2^{2n}n!(1+a^2)^{n+\frac{1}{2}}(2n+1)!};$$

$$\text{д) } \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}(x)}{2^{2n}n!(2n+1)!};$$

$$\text{е) } \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n+\frac{1}{2}}n!} \cdot \frac{H_{2n}(x)}{2n+1}.$$

$$368) \frac{1}{8 \cdot 27\sqrt{3}} H_5(x) + \frac{1}{9\sqrt{3}} H_3(x) + \frac{4}{3\sqrt{3}} H_1(x).$$

$$377) \text{ а) } e^{\frac{t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n}(x) \frac{t^{2n}}{(2n)!}. \text{ Указание. Сложить разложения}$$

для функций $\frac{1}{2}e^{tx-\frac{t^2}{2}}$ и $\frac{1}{2}e^{-tx-\frac{t^2}{2}}$;

$$\text{б) } e^{\frac{t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} h_{2n+1}(x);$$

$$\text{в) } e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} h_{2n}(x);$$

$$\text{г) } e^{-\frac{t^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} h_{2n+1}(x).$$

$$378) h_n(x) = 2^{-n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right); H_n(x) = 2^{n/2} h_n(x\sqrt{2}).$$

379) Сделав замену переменной $x\sqrt{\lambda} = t$, получить равенство

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-\lambda x^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt - \int_{a\sqrt{\lambda}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

$$380) \text{ Рассмотреть разность } A = \left| \int_0^a f(x) e^{-\lambda x^2} dx - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} f(0) \right|.$$

Используя результат предыдущей задачи и теорему Лагранжа, имеем

$$\begin{aligned} A &\leq \left| \int_0^a (f(x) - f(0)) e^{-\lambda x^2} dx \right| + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \leq \\ &\leq C \int_0^a x e^{-\lambda x^2} dx + o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

381) Указание. Показав, что функция $x(t)$, $t \in [0; \sqrt{g(b)}]$, обратная к $\sqrt{g(x)}$, $x \in [0; b]$, непрерывно дифференцируема на $[0; \sqrt{g(b)}]$ и $x'(0) = \sqrt{\frac{2}{g''(0)}}$, сделать в интеграле $\int_0^b f(x) e^{-\lambda x^2} dx$ замену $x = x(t)$ и использовать результат задачи 380.

382) Указание. Использовать указание к задаче 381, заменяя отрезок $[0; b]$ на $[a; 0]$.

383) Указание. Представив интеграл $\int_a^b f(x) e^{-\lambda g(x)} dx$ как $e^{-\lambda g(x_0)} \int_a^b f(x) e^{-\lambda(g(x)-g(x_0))} dx$, сделать в нем замену $u = x - x_0$ и применить результаты задач 381 и 382.

384) Сделав замену $t = xu$ в интеграле, получим, что

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} \int_0^{+\infty} e^{-xg(u)} du,$$

где $g(u) = u - \ln u$. Используя результат задачи 383, имеем

$$\int_{1/2}^2 e^{-xg(u)} du \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} 0 < \int_2^{+\infty} e^{-xg(u)} du &< 2 \int_2^{+\infty} g'(u) e^{-xg(u)} du = \frac{2}{x} e^{-xg(2)} < \\ &< \frac{2}{x} e^{-xg(1)} = \frac{2e^{-x}}{x} \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$0 < \int_0^{1/2} e^{-xg(u)} du < \frac{2e^{-x}}{x}.$$

Поскольку $\frac{2e^{-x}}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то

$$\int_2^{+\infty} e^{-xg(u)} du \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \int_0^{1/2} e^{-xg(u)} du \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$\begin{aligned} 385) \int_0^a e^{i\lambda x^2} dx &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{a\sqrt{\lambda}} e^{it^2} dt \sim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt + i \int_0^{+\infty} \sin t^2 dt \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{i\pi/4}. \end{aligned}$$

386) В силу теоремы Лагранжа $f(x) - f(0) = x\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ непрерывна. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^a (f(x) - f(0))e^{i\lambda x^2} dx &= \int_0^a x\varphi(x)e^{i\lambda x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2\lambda i} \int_0^a \varphi(x) d(e^{i\lambda x^2}) = \frac{1}{2\lambda i} \varphi(x)e^{i\lambda x^2} \Big|_0^a - \\ &- \frac{1}{2\lambda i} \int_0^a \varphi'(x)e^{i\lambda x^2} dx = o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

387) д) Указание. Воспользоваться тождеством

$$k!n^{-k} = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^k dt$$

Тогда $\sum_{k=0}^n C_n^k k!n^{-k} = \int_0^{+\infty} (1+t)^n e^{-nt} dt.$

И. А. ВИНОГРАДОВА, С. Н. ОЛЕХНИК, В. А. САДОВНИЧИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ АНАЛИЗ

В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ
(НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ ФУРЬЕ)



ФАКТОРИАЛ

ISBN 5-88688-007-0